Università degli Studi di Ferrara
facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali
Corso di Laurea triennale in Matematica
Indirizzo: Matematica Pura

Varietà grassmanniane

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Massimiliano Mella

Laureando:
Giulio Battaglia

Anno Accademico 2008-2009

Indice

1 Algebra multilineare **5**
1.1 Moduli, moduli liberi 5
1.2 Prodotto tensoriale di moduli 8
1.3 Algebra esterna 11

2 Grassmanniane **15**
2.1 Vettori totalmente decomponibili 16
2.2 Algebra esterna e dualità 19
2.3 Topologie sullo spazio proiettivo 20
2.4 Varietà differenziabili 24
2.5 Compattezza 27
2.6 Le relazioni di Plücker 28
2.7 La grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^n$ 31

Introduzione

La matematica, ed in particolar modo la geometria, si occupano di definire oggetti che parametrizzano classi di oggetti già noti, per ottenere maggiori informazioni su di essi o col fine di poter maneggiare strumenti più versatili di quelli di partenza. In questa tesi ci proponiamo di studiare le varietà che parametrizzano l'insieme dei sottospazi lineari di dimensione p di uno spazio vettoriale di dimensione n. Tali varietà sono oggi note col nome di grassmanniane, in onore del matematico tedesco Hermann Grassmann (1809-1877), che per primo le introdusse nella sua opera del 1844 Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik *(La teoria dell' estensione lineare, una nuova branca della matematica). L'opera rappresenta un capolavoro di originalità, sia per le teorie matematiche in essa contenute — che per la prima volta considerano la costruzione di una geometria iperspaziale —, sia per la terminologia adottata, astratta e poco convenzionale al punto che i contemporanei non riconobbero l'importanza del lavoro di Grassmann.*

Cominceremo il lavoro estendendo la teoria dei determinanti, il cui traguardo, rappresentato dall'algebra esterna, ci permetterà di definire agevolmente le grassmanniane. Grazie alla fondamentale mappa di Plücker andremo poi a immergere tali varietà in uno spazio proiettivo. Questa immersione ci permetterà innanzitutto di definire un atlante sulla grassmanniana, le cui buone proprietà la renderanno ciò che si dice una varietà differenziabile (o analitica, se si assume il punto di vista complesso in luogo di quello reale). Come secondo traguardo mostreremo che la grassmanniana è una varietà proiettiva, ossia che è il luogo degli zeri di una famiglia di polinomi omogenei. Ciò ci permetterà di concludere, dopo aver dotato $\mathbb{P}^n$ della struttura di spazio topologico compatto, che sotto note topologie la grassmanniana è un sottoinsieme chiuso, dunque compatto, dello spazio proiettivo. Risultato conclusivo della tesi sarà ricavare le relazioni di Plücker, le quali mostrano che tutte le grassmanniane possono essere descritte come luogo di zeri di polinomi quadratici. Nel caso delle grassmanniane che parametrizzano sottospazi lineari di dimensione due riusciremo infine ad esprimere tali relazioni in una forma semplice ed elegante.

Capitolo 1

Algebra multilineare

La struttura più generale sulla quale si può costruire l'algebra esterna è quella di modulo e, come vedremo, le proprietà più interessanti si ottengono considerando particolari moduli, detti moduli liberi, che soddisfano note proprietà degli spazi vettoriali.

1.1 Moduli, moduli liberi

Un modulo rappresenta una generalizzazione del concetto di spazio vettoriale. Gli scalari infatti, invece di appartenere a un campo, possono essere elementi di un anello qualunque. Dovremo rinunciare (solo in parte) a strumenti importanti come le basi, ma guadagneremo in astrazione. Già dai primi esempi si potrà infatti osservare quanto la struttura di modulo sia generale, e si adatti a rappresentare oggetti noti sin dai primi corsi di Algebra.

Definizione 1.1. Sia A un anello, che supporremo sempre commutativo. Un A-modulo è una coppia ordinata (M, μ), dove M è un gruppo abeliano additivo e $\mu : A \times M \longrightarrow M$ è una funzione che soddisfa le seguenti proprietà, dove con ax indichiamo l'immagine $\mu(a, x)$:

$$a(x + y) = ax + ay, \tag{1.1}$$

$$(a + b)x = ax + bx, \tag{1.2}$$

$$(ab)x = a(bx), \tag{1.3}$$

$$1x = x, \tag{1.4}$$

per ogni $a, b \in A$ e per ogni $x, y \in M$.

Dopo averla enunciata, abbandoniamo la notazione di modulo come coppia ordinata. D'ora in poi ci riferiremo ad esso indicando semplicemente il gruppo abeliano che lo definisce, sottintendendo la presenza di

una funzione opportuna che soddisfa gli assiomi di modulo. Talvolta, per abuso di linguaggio, indicheremo gli elementi di un A-modulo M col nome di vettori. Passiamo subito a descrivere un paio di esempi importanti. Primo, si osserva facilmente come un ideale $\mathfrak{a}$ di A (quindi anche A stesso) possa essere riguardato come un modulo su A. Secondo, qualsiasi gruppo abeliano G è automaticamente un modulo sull'anello $\mathbb{Z}$ degli interi (infatti in un gruppo abeliano additivo l'assegnazione $a \longmapsto na = a + \cdots + a$ (n *volte*) soddisfa alle richieste sulla funzione μ). Viceversa, in base a tali assiomi, in uno $\mathbb{Z}$-modulo ciascun multiplo scalare na corrisponde proprio alla somma algebrica di n copie di a (basta sfruttare la proprietà 1.4, quindi la 1.2 con $a = b = 1$). Abbiamo così mostrato che uno $\mathbb{Z}$-modulo *è* un gruppo abeliano. Per concludere, consideriamo l'insieme di tutti i morfismi di A-moduli da M in N, denotato $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ (o, più semplicemente $\mathrm{Hom}(M, N)$). Esso può essere riguardato come un A-modulo, definendo le operazioni di somma e moltiplicazione scalare nel solito modo: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(af)(x) = a \cdot f(x)$.

Ricordiamo che un sottomodulo M' di un modulo M è un sottogruppo di M chiuso rispetto alla moltiplicazione scalare. Essendo ogni sottogruppo di un gruppo abeliano un sottogruppo normale, possiamo sempre considerare il gruppo (abeliano) quoziente M/M', che diventa il modulo quoziente di M su M' dopo aver definito le solite operazioni. Si noti qui come la stuttura di modulo permetta di mettere sullo stesso piano un ideale $\mathfrak{a}$ e l'anello quoziente $A/\mathfrak{a}$ ad esso associato.

Se M e N sono due A-moduli, la loro somma diretta $M \oplus N$ è l'insieme di tutte le coppie (x, y), al variare di x in M e di y in N. Questo diventa un A-modulo dopo aver definito le due operazioni nella maniera più ovvia:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Più in generale, se $(M_i)_{i \in I}$ è una qualsiasi famiglia di A-moduli, definiamo la loro somma diretta $\bigoplus_{i \in I} M_i$ come l'insieme delle sequenze $(x_i)_{i \in I}$ dove $x_i \in M_i$ per ogni $i \in I$ e gli x_i sono nulli eccetto al più un numero finito di essi. Se lasciamo cadere la restrizione sul numero di elementi non nulli abbiamo il prodotto cartesiano, o prodotto diretto, $\prod_{i \in I} M_i$. Prodotto diretto e somma diretta coincidono quando la cardianlità di I è finita, ma non in generale.

Come annunciato all'inizio, passare dalla struttura di spazio vettoriale a quella più generale di modulo non consente di ereditare in maniera del tutto immediata un oggetto importante quale è una base. Oltre che avere una forte utilità pratica, essa è strettamente legata alla dimensione dello

spazio vettoriale, definita come la cardinalità dell'insieme dei vettori di una base (che in tal caso risulta essere invariante). Per ottenere qualche risultato interessante, non possiamo permetterci di rinunciare ad un tale stumento, cosa che infatti non faremo: partendo dalle proprietà note, andremo ora a trasferirle nel nuovo contesto, allungando un poco la nostra lista di definizioni.

Definizione 1.2. Un A-modulo libero M è un modulo contenente un insieme linearmente indipendente $X = \{e_i\}_{i \in I}$ di generatori. Tale insieme viene anche detto una base per l'A-modulo M, e in tal caso si dice che M è un A-modulo libero su X, o modulo con base.

Ciò significa che ogni elemento di M si può esprimere come combinazione lineare *finita* a coefficienti in A di elementi di X, il che è equivalente a dire che M è isomorfo ad un A-modulo della forma $\bigoplus_{x \in X} M_x$, dove $M_x \cong A$ (come A-moduli). poiché questo è vero per ogni A-modulo libero su X, M risulta essere unico a meno di isomorfismi, e perciò si usa indicare con $A^{(X)}$. Dire che X è un insieme linearmente indipendente, o libero, equivale a dire che $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0$ implica $a_1 = \cdots = a_n = 0$ per ogni combinazione lineare finita a coefficienti in A di elementi di X. Si noti come quest'ultima condizione implichi l'unicità della scrittura di un elemento di M come combinazione lineare di elementi di X. Se X è un insieme di cardinalità finita si dice che l'A-modulo libero M è finitamente generato.

Se ci limitiamo a considerare moduli che ammettono una base, finora sembra andare tutto bene, quindi. Il problema sorge però sul concetto di dimensione. Naturalmente l'insieme X di generatori liberi non è unico (si pensi al caso particolare in cui M è uno spazio vettoriale). Perché abbia senso parlare di dimensione, la cardinalità degli insiemi di generatori liberi deve essere invariante, come sottolineato precedentemente. A tal proposito, si dice che un anello A gode della proprietà IBN (dall'inglese *invariant basis number*) se, per ogni A-modulo libero M, dall'essere $M \cong A^m$ e $M \cong A^n$ (m,n finiti), discende che $m = n$. Naturalmente, ogni campo verifica la proprietà IBN. In questo caso, si definisce *rango* dell'A-modulo libero M l'unico esponente m tale che $M \cong A^m$. Mostriamo ora un esempio di anello che non soddisfa la proprietà IBN. Consideriamo $A = \mathrm{End}_{\mathsf{K}}(\mathsf{K}[x])$, dove $\mathsf{K}[x]$ è l'anello dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in un campo K. Riguardando l'anello A come un A-modulo, si osserva facilmente come ogni insieme X di generatori liberi abbia cardinalità 1.[1] Come noto, possiamo dotare $\mathsf{K}[x]$ della struttura di spazio

[1] Infatti, se esistessero $f, g \in X$ con $f \neq g$, si avrebbe che $gf - fg = 0$ (dove i primi fattori sono visti come coefficienti nell'anello A), contrariamente al fatto che f e g sono liberi. Perciò $\mathrm{card}(X) = 1$, ed essendo $\mathrm{Id}_{\mathsf{K}[x]} \in A$, si osserva che A è un modulo libero su $\{f\}$ se e solo se f è invertibile.

vettoriale su K. In quest'ottica una sua base è data da $1 = x^0$, x, x^2, $\ldots$. Possiamo quindi identificare ogni polinomio $p(x)$ con la successione di elementi di K $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove la coordinata n-esima di p corrisponde al coefficiente del termine di grado n del polinomio $p(X)$. In questo modo, essendo un polinomio in $\mathsf{K}[x]$ una combinazione lineare finita di monomi nell'indeterminata x abbiamo stabilito una biiezione tra tale anello e l'insieme $S_{\mathsf{K}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K_n$ (dove, per ogni n, $K_n = \mathsf{K}$). Sia ora $f : S_{\mathsf{K}} \times S_{\mathsf{K}} \longrightarrow S_{\mathsf{K}}$ l'applicazione che alla coppia (p, q) associa $s = (s_n)$ definita nel modo seguente:

$$s_n = \begin{cases} p_k & \text{se } n = 2k \\ q_k & \text{se } n = 2k+1. \end{cases}$$

Chiaramente f è un isomorfismo, che induce un isomorfismo di A-moduli

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_{\mathsf{K}}(\mathsf{K}[x] \times \mathsf{K}[x]) & \xrightarrow{\simeq} & A \\ g & \longmapsto & \tilde{f} g \tilde{f}^{-1}, \end{array}$$

dove abbiamo definito $\tilde{f} : \mathsf{K}[x] \times \mathsf{K}[x] \longrightarrow \mathsf{K}[x] : (p(x), q(x)) \longmapsto s(x)$ a partire da f sfruttando l'isomorfismo tra $\mathsf{K}[x]$ e S_{K}. Ora, ogni endomorfismo g di $\mathsf{K}[x] \times \mathsf{K}[x]$, essendo un'applicazione lineare, è della forma

$$(p, q) \longmapsto (g_1(p) + g_2(q), g_3(p) + g_4(q)),$$

con $g_i(p) \in \mathrm{End}_{\mathsf{K}}(\mathsf{K}[x]) = A$.

Abbiamo così dimostrato che $A^4 \cong \mathrm{End}_{\mathsf{K}}(\mathsf{K}[x] \times \mathsf{K}[x]) \cong A$, e il rango dell'$A$-modulo $\mathrm{End}_{\mathsf{K}}(\mathsf{K}[x] \times \mathsf{K}[x])$ non risulta ben definito.

1.2 Prodotto tensoriale di moduli

Definizione 1.3. Siano $M_1, \ldots, M_r, P$ A-moduli. Un'applicazione $f : M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow P$ si dice A-multilineare (o, più semplicemente, multilineare) se è lineare su ogni componente, ossia se per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ la mappa

$$x_i \longmapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_r)$$

è lineare, comunque fissata la $r-1$-upla $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r)$.

A partire da $M_1, \ldots, M_r$ costruiremo ora un A-modulo T, detto prodotto tensoriale di $M_1, \ldots, M_r$, con la proprietà che per ogni A-modulo P l'insieme delle applicazioni multilineari da $M_1 \times \cdots \times M_r$ in P è in corrispondenza biunivoca con $\mathrm{Hom}(T; P)$, insieme delle applicazioni lineari da T in P.

Proposizione 1.4. *Siano $M_1, \dots, M_r$ A-moduli. Esiste una coppia (T, g), dove T è un A-modulo e g una mappa A-multilineare $M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow T$, con la seguente proprietà:*

Dato un qualsiasi A-modulo P e un'applicazione multilineare $f : M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow P$, esiste un'unico morfismo di A-moduli (i.e. una mappa A-lineare) $f' : T \longrightarrow P$ tale che $f' \circ g = f$ (in tal caso si dice che g è una funzione universale tra le funzioni definite su $M_1, \dots, M_r$ a valori in un A-modulo).

Inoltre, se (T, g) e (T', g') sono due coppie che godono di tale proprietà, allora esiste un unico isomorfismo $j : T \longrightarrow T'$ tale che $j \circ g = g'$.

Dimostrazione. (Unicità) Sostituendo P ed f rispettivamente con T' e g' otteniamo un unico morfismo $j : T \longrightarrow T'$ tale che $g' = j \circ g$. Invertendo i ruoli di T e T' otteniamo poi $j' : T' \longrightarrow T$ tale che $g = j' \circ g'$. Se andiamo ora ad inserire queste relazioni l'una nell'altra, ricaviamo che $j \circ j' = \mathrm{Id}_{T'}$ e $j' \circ j = \mathrm{Id}_T$, per cui j è un isomorfismo.
(Esistenza) Indichiamo con C il modulo libero $A^{(M_1 \times \cdots \times M_n)}$. Per definizione, gli elementi di C sono tutte e sole le combinazioni lineari finite di elementi di $M_1 \times \cdots \times M_n$ a coefficienti in A, ossia

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1^i, \dots, x_r^i) \Big| a_i \in A, x_j^i \in M_j \text{ per ogni } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r \Big\}.$$

Sia D il sottomodulo di C generato da tutti gli elementi di C della forma

$$(\dots x_{i-1}, x_i + x_i', x_{i+1} \dots) - (\dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \dots) - (\dots x_{i-1}, x_i', x_{i+1} \dots),$$

$$(\dots x_{i-1}, a x_i, x_{i+1} \dots) - a(\dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \dots),$$

e poniamo $T = C/D$. Per ogni elemento $(x_1, \dots, x_r)$ dell'insieme di generatori liberi di C, denotiamo con $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ la sua immagine in T tramite la proiezione canonica. T risulta quindi generato dagli elementi della forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ e, per come abbiamo quozientato l'insieme C, si ha che:

$$(\dots \otimes x_{i-1} \otimes x_i + x_i' \otimes x_{i+1}, \dots) =$$

$$(\dots \otimes x_{i-1} \otimes x_i \otimes x_{i+1} \otimes \dots) + (\dots \otimes x_{i-1} \otimes x_i' \otimes x_{i+1} \otimes \dots),$$

$$(\dots \otimes x_{i-1} \otimes a x_i \otimes x_{i+1} \otimes \dots) = a(\dots \otimes x_{i-1} \otimes x_i \otimes x_{i+1} \otimes \dots).$$

Equivalentemente, l'applicazione $g : M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow T$ definita da $g(x_1, \dots, x_r) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ è multilineare. Ciò che abbiamo fatto, in effetti, non è stato altro che quozientare C con il più piccolo insieme che rendesse la mappa g multilineare.

Ogni mappa $f : M_1 \times \cdots \times M_r \longrightarrow P$ si estende per linearità ad un morfismo di A-moduli $\bar{f} : C \longrightarrow P$. Se in particolare F è multilineare,

essa si annulla su tutti i generatori di D, ossia $D \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Risulta allora ben definito un morfismo f' da $T = C/D$ in P, tale che $f'(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = f(x_1, \ldots, x_r)$. Inoltre, la mappa f' risulta univocamente determinata da f. Abbiamo così dimostrato che la coppia (T, g) soddisfa le proprietà della proposizione. $\square$

Osservazioni 1.5. Come A-modulo, il prodotto tensoriale ora costruito, denotato $M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$, è generato dai prodotti $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$. Si osservi quindi come un generico elemento del prodotto tensoriale sia una somma del tipo $\sum_{j=1}^{n} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_r^j$, e non possa necessariamente essere scritto nella forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$. Se poi $M_1 \times \cdots \times M_r$ sono moduli liberi generati rispettivamente dalle famiglie $\{x_1^{i_1}\}_{i_1 \in I_1}, \ldots, \{x_r^{i_r}\}_{i_r \in I_r}$, allora gli elementi $x_1^{i_1} \otimes \cdots \otimes x_r^{i_r}$ generano $M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$. Dunque, se gli M_j sono finitamente generati, tale è anche il loro prodotto tensoriale.

Aggiungiamo una considerazione importante. La notazione $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ risulta di per sè ambigua, se non si specifica il prodotto tensoriale cui si fa riferimento. Infatti, dati M', N' sottomoduli di M e N rispettivamente, e presi $x \in M'$, $y \in N'$, può accadere che $x \otimes y$ come elemento di $M \otimes N$ sia zero, mentre *come elemento di* $M' \otimes N'$ sia diverso da zero (attenti alle inclusioni, quindi). Per esempio, siano $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e come M' consideriamo il sottomodulo $2\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$, mentre $N' = N$. Sia x l'elemento non nullo di N e consideriamo $2 \otimes x$. Come elemento di $M \otimes N$ esso è zero, poiché $2 \otimes x = 1 \otimes 2x = 1 \otimes 0 = 0$. Osserviamo invece che, riguardato come elemento di $M' \otimes N'$, esso è diverso da zero.

Le proprietà del prodotto tensoriale ci permettono di ottenere $M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ a partire da $M_1 \otimes M_2$ sfruttando ricorsivamente la seguente legge associativa:

$$(M \otimes N) \otimes P = M \otimes (N \otimes P) = M \otimes N \otimes P, \tag{1.5}$$

dove l'uguaglianza è da intendersi a meno di isomorfismi di A-moduli. Come esempio, costruiamo un isomorfismo da $(M \otimes N) \otimes P$ in $M \otimes N \otimes P$. Fissiamo un elemento $z \in P$, e consideriamo la mappa

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \longrightarrow & M \otimes N \otimes P \\ (x, y) & \longmapsto & x \otimes y \otimes z. \end{array}$$

Poiché, come si osserva facilmente, tale mappa è bilineare, per la proposizione 1.4 essa induce un morfismo

$$\begin{array}{cccc} f_z : & M \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \otimes P \\ & x \otimes y & \longmapsto & x \otimes y \otimes z. \end{array}$$

Consideriamo poi l'applicazione da $M \otimes N \times P$ in $M \otimes N \otimes P$ definita da $(t, z) \longmapsto f_z(t)$. Di nuovo, essa bilineare, perciò induce un morfismo

$f : (M \otimes N) \otimes P \longrightarrow M \otimes N \otimes P$ tale che $f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$. Infine, poniamo

$$\begin{array}{rccc} g: & M \times N \times P & \longrightarrow & (M \otimes N) \otimes P \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x \otimes y) \otimes z. \end{array}$$

Essendo trilineare, sempre per 1.4, g induce un morfismo da $M \otimes N \otimes P$ in $(M \otimes N) \otimes P)$ che a $x \otimes y \otimes z$ associa $(x \otimes y) \otimes z$. Chiaramente, $f \circ g$ e $g \circ f$ sono le applicazioni identiche, ossia $g = f^{-1}$, ed f è un isomorfismo.

In maniera analoga si dimostra l'esistenza di altri isomorfismi 'canonici' relativi al prodotto tensoriale di A-moduli:

$$\begin{array}{ccc} M \otimes N & \xrightarrow{\simeq} & N \otimes M \\ x \otimes y & \longmapsto & y \otimes x, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M & \xrightarrow{\simeq} & M \\ a \otimes x & \longmapsto & ax, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes N & \xrightarrow{\simeq} & \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes N) \\ (x_i)_{i \in I} \otimes y & \longmapsto & (x_i \otimes y)_{i \in I}. \end{array}$$

Osservazione 1.6. Siano $f_i : M_i \longrightarrow N_i$, $i = 1, \ldots, r$ morfismi di A-moduli. Si ha allora che l'applicazione $(x_1, \ldots, x_r) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_r(x_r))$ è multilineare. Di nuovo, in base alla proposizione 1.4 tale assegnazione definisce un'applicazione lineare $f_1 \otimes \cdots \otimes f_r : M_1 \otimes \cdots \otimes M_r \longrightarrow N_1 \otimes \cdots \otimes N_r$ e, per come è definita, risulta $(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r)(\sum_{j=1}^n x_1^j \otimes \cdots \otimes x_r^j) = \sum_{j=1}^n f_1(x_1^j) \otimes \cdots \otimes f_r(x_r^j)$; in particolare, se le f_i sono suriettive, anche $f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$ lo è.

Concludiamo con una osservazione molto importante che ci sarà utile in seguito.

Osservazione 1.7. Consideriamo il prodotto tensoriale dei K-spazi vettoriali $V_1, \ldots, V_r$, che si mostra facilmente essere uno spazio vettoriale su K. Abbiamo visto che, per la proprietà universale che caratterizza il prodotto tensoriale, viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle applicazioni multilineari da $V_1 \times \cdots \times V_r$ in K e $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r; \mathsf{K})$, che sotto queste ipotesi è il duale del prodotto tensoriale dei V_i, $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r)^*$. Questo implica che ogni elemento del duale può essere identificato con una forma multilineare su $V_1 \times \cdots \times V_r$. Se poi i V_i sono spazi vettoriali di dimensione finita vale anche il viceversa, e possiamo vedere un elemento di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ come una forma multilineare su $V_1^* \times \cdots \times V_r^*$.

1.3 Algebra esterna

D'ora in avanti, nel considerare un anello A, sottintenderemo che si tratti di un anello commutativo soddisfacente la proprietà IBN. Costruiremo ora l'algebra esterna a partire da un A-modulo libero M.

Siano M, N moduli su un anello A, e sia p un intero non negativo. Ricordiamo che mediante la notazione M^p, con p strettamente positivo, si usa indicare l'A modulo $M \times \cdots \times M$ (p *volte*); si pone inoltre $M^0 = A$.

Definizione 1.8. Un'applicazione multilineare $f : M^p \longrightarrow N$ viene detta p-alternante (o, più semplicemente, alternante) quando:

$$i \neq j,\ x_i = x_j \implies f(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Una conseguenza di questa proprietà è che una trasposizione delle entrate cambia di segno ad f, infatti:

$$\begin{aligned} f(\dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots) &= \\ f(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots) + f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + & \\ f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) + f(\dots, x_j, \dots, x_j, \dots) &= \\ f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) + f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) &= 0, \end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza è conseguenza della multilinearità di f, la seconda dell'essere un'applicazione alternante. Da questa otteniamo infine $f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$.

Andiamo a ripetere nel caso delle applicazioni alternanti quanto fatto per le applicazioni multilineari nel paragrafo precedente. Vogliamo costruire una nuova coppia universale rispetto alle applicazioni p-alternanti. L'idea è sempre la stessa: per tenere conto delle proprietà ora enunciate, di cui godono particolari applicazioni multilineari — proprietà tipiche del determinante di una matrice —, andremo a quozientare il prodotto tensoriale $M \otimes \cdots \otimes M$ con le relazioni che le definiscono.

Quanto affermato si traduce nella seguente proposizione.

Proposizione 1.9. *Sia M un A-modulo. Esiste una coppia (E, h), dove E è un A-modulo ed h un'applicazione p-alternante, $h : M^p \longrightarrow E$, con la seguente proprietà:*

Dato un qualsiasi A-modulo N ed una mappa p-alternante $f : M^p \longrightarrow N$, esiste un unico morfismo di A-moduli $f' : E \longrightarrow N$ tale che $f' \circ h = f$.

Inoltre, se (E, h) e (E', h') sono due coppie che godono di tale proprietà, allora esiste un unico isomorfismo $k : E \longrightarrow E'$ tale che $k \circ h = h'$.

Dimostrazione. L'unicità segue dalla proposizione 1.4, essendo h prima di tutto un'applicazione multilineare. Per provare l'esistenza basta ragionare in maniera analoga a quanto fatto precedentemente, definendo E come il quoziente del prodotto tensoriale $M \otimes \cdots \otimes M$ (*p volte*) rispetto al sottomodulo generato dagli elementi della forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_p$. Ciò equivale a definire, nelle notazioni di 1.4, $E = C/D'$, dove abbiamo posto $D' = D \cup \{(\dots, x_i, \dots, x_i, \dots)\}$. $\square$

Dato un A-modulo M, l'A-modulo E di una coppia (E, h) universale rispetto alle applicazioni p-alternanti si dice p-esima potenza esterna, o p-esimo prodotto esterno, di M, e si indica col simbolo $\bigwedge^p M$. Enfatizzandone la struttura, i suoi elementi vengono detti multivettori, o p-vettori (a volte li chiameremo semplicemente vettori). Per quanto appena visto, $\bigwedge^p M$ risulta unico a meno di isomorfismi. Poniamo, per definizione, $\bigwedge^0 M = A$. Si osservi inoltre, come si può facilmente verificare, che per $p = 1$ la coppia (E, h) coincide con la coppia (M, Id_M), ossia $\bigwedge^1 M = M$ e h è l'applicazione identica. L'immagine di un generico elemento $(x_1, \dots, x_p)$ dell'insieme di generatori di C tramite l'applicazione h si indica $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$; un tale p-vettore viene detto *totalmente decomponibile*. L'insieme dei vettori totalmente decomponibili costituisce quindi un sistema di generatori di $\bigwedge^p M$.

Ritorniamo a focalizzare l'attenzione sugli oggetti da cui siamo partiti, le applicazioni alternanti. Abbiamo definito queste applicazioni multilineari su un dominio particolare, il prodotto cartesiano $M \times \cdots \times M$ di p copie di M. Un tale dominio permette di ottenere nell'ambito del calcolo tensoriale nuove e interessanti proprietà. Definiamo il p-esimo prodotto tensoriale $M^{\otimes p}$ di un A-modulo M come il prodotto tensoriale di p copie di M. Per convenzione si assume $M^{\otimes 0} = A$. Si osserva come l'applicazione g della proposizione 1.4 definisca una mappa

$$M^{\otimes p} \times M^{\otimes q} \longrightarrow M^{\otimes p} \otimes M^{\otimes q} \xrightarrow{\simeq} M^{\otimes p+q},$$

dove l'isomorfismo è conseguenza dell'associatività del prodotto tensoriale, in base a quanto mostrato nell'equazione 1.5. Se ora consideriamo la somma diretta degli A-moduli $M^{\otimes p}$ per $p = 0, 1, 2, \dots$

$$T(M) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} M^{\otimes p},$$

otteniamo un nuovo A-modulo, che abbiamo indicato con $T(M)$, detto algebra tensoriale di M. Su di esso, la mappa precedente definisce una moltiplicazione interna

$$\begin{array}{rcl} T(M) \times T(M) & \longrightarrow & T(M) \\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) & \longmapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_q. \end{array}$$

Questa legge di composizione interna conferisce a $T(M)$ una struttura di A-algebra graduata.

Un'analoga costruzione può essere ripetuta considerando in luogo del p-esimo prodotto tensoriale, il p-esimo prodotto esterno $\bigwedge^p M$. Poniamo $\bigwedge(M) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigwedge^p M = A \oplus M \oplus \bigwedge^2 M \oplus \dots$; un tale A-modulo viene detto algebra esterna di M. Su di esso si può infatti definire, in maniera analoga a quanto fatto per l'algebra tensoriale la seguente legge di composizione interna, che rende $\bigwedge(M)$ una A-algebra graduata:

$$\begin{array}{rcl} \bigwedge(M) \times \bigwedge(M) & \longrightarrow & \bigwedge(M) \\ (x_1 \wedge \dots \wedge x_p, y_1 \wedge \dots \wedge y_q) & \longmapsto & x_1 \wedge \dots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_q. \end{array}$$

Di più, possiamo osservare come, se $\alpha \in \bigwedge^p M$, $\beta \in \bigwedge^q M$, si abbia

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \tag{1.6}$$

(occorrono infatti p trasposizioni per portare la prima componente di β al primo posto, poi p trasposizioni per portare la seconda coordinata di β al secondo posto...). A causa di tale proprietà si dice che la gradazione sull'algebra esterna $\bigwedge(M)$ è anticommutativa. Facciamo qui osservare che avremmo potuto definire l'algebra esterna come quoziente dell'algebra tensoriale $T(M)$ tramite l'ideale bilatero generato dagli elementi della forma $x \otimes x$ al variare di x in M.

Partendo da un esempio ben noto, mostreremo ora che l'algebra esterna di un modulo non banale è non banale e vedremo che — a differenza di quanto accade per l'algebra tensoriale —, se il modulo di partenza è finitamente generato anch'essa lo è, arrivando infine a calcolarne il rango.

Esempio 1.10. Sia M un A-modulo finitamente generato, e fissiamo una sua base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Consideriamo l'applicazione $d : M^n \longrightarrow A$ definita da

$$d(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dove le colonne $(a_{1i}, \dots, a_{ni})$ della matrice sono le coordinate di x_i rispetto alla base fissata. Come sappiamo d è un'applicazione multilineare alternante. Per la proprietà universale dell'applicazione $h : M^n \longrightarrow \bigwedge^n M$ definita precedentemente, esiste un'applicazione lineare $d' : \bigwedge^n M \longrightarrow A$ tale che $d = d' \circ h$. Dall'essere $d \neq 0$ segue in particolare che $\bigwedge^n M \neq \{0\}$.

Grazie a questo esempio, abbiamo visto che se M è un A-modulo libero di rango n, allora $\bigwedge^n M$ è un A-modulo non banale. Mantenendo le

notazioni della proposizione 1.9 osserviamo tuttavia che, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è un insieme di generatori liberi per M, allora l'insieme dei generatori liberi di $C = A^{(M^p)}$ è costituito dagli elementi della forma $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ al variare di i_j nell'insieme $\{1, \dots, n\}$. Si deduce facilmente, quindi, che se $p > n$ esisteranno sempre almeno due indici i_j e $i_{j'}$ che assumono lo stesso valore. La proiezione al quoziente manda ognuno di questi generatori nello zero. In tal caso quindi non esistono p-vettori non nulli, e $\bigwedge^p M = \{0\}$.[2] Ciò non deve affatto stupire, avendo definito questa nuova struttura algebrica per tenere conto di quelle proprietà del determinante di una matrice quali l'indipendenza lineare tra vettori. Se due colonne di una matrice sono linearmente dipendenti, il suo determinante risulta nullo. Analogamente, vedremo che se le componenti di un p-vettore sono legate, questo è uguale a zero, ma ora concludiamo il capitolo determinando nel caso di un modulo finitamente generato M la base di $\bigwedge^p M$ per ogni valore di p.

Proposizione 1.11. *Sia M un A-modulo libero di rango n, e si fissi una sua base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Si ha che:*

1. *Se $p > n$, allora $\bigwedge^p M = \{0\}$;*
2. *Se $1 \leq p \leq n$, allora $\bigwedge^p M$ è un A-modulo libero di rango $\binom{n}{p}$, ed una sua base è data dai p-vettori della forma:*

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, \text{ con } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n.$$

Dimostrazione. Il primo punto è già stato dimostrato, proviamo la seconda parte della proposizione. Per quanto visto sopra, i generatori di C sono gli elementi $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, dove l'indice i_j varia nell'insieme $\{1, \dots, n\}$. L'immagine, tramite la proiezione canonica, di quei generatori che presentano indici ripetuti è zero, dunque l'insieme dei generatori di $\bigwedge^p M$ si riduce a quegli elementi della forma $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ dove $j \neq j'$ implica $i_j \neq i_{j'}$. Dato un vettore totalmente decomponibile di questo tipo, possiamo permutare le sue componenti in modo da ordinarle in maniera strettamente crescente, una tale operazione fa eventualmente cambiare di segno al p-vettore considerato. Ciò significa che ogni p-vettore avente come insieme di indici $\{i_1, \dots, i_p\}$ un dato sottoinsieme dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ è legato al p-vettore che presenta tali indici in ordine strettamente crescente. Possiamo quindi considerare come sistema di generatori di $\bigwedge^p M$ solamente quegli elementi del tipo $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ con $i_1 < \dots < i_p$. Per concludere basta allora verificare che questi vettori sono linearmente indipendenti su A. Nel caso particolare in cui $p = n$,

[2] Per un A-modulo libero di rango n possiamo dunque limitare l'indice p di somma diretta nella definizione di $\bigwedge(M)$ tra 0 e n.

$\bigwedge^n M$ è generato dal solo elemento $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, e poiché nell'esempio 1.10 abbiamo visto che $\bigwedge^n M \neq \{0\}$, esso è linearmente indipendente in quanto non nullo. Se $p < n$, dobbiamo dimostrare che presa una qualsiasi combinazione lineare nulla

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = 0$$

di generatori di $\bigwedge^p M$, risulta $a_{i_1,\ldots,i_p} = 0$ per ogni multi-indice $i_1, \ldots, i_p$ della sommatoria. Consideriamo un multi-indice $i_1, \ldots, i_p$ e sia $\tau = e_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ con $i_{p+1}, \ldots, i_n$ tali che $\{i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$. Si osserva facilmente che il prodotto di ω e τ, riguardati come elementi di $\bigwedge(M)$, è uguale a $(\pm 1) a_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$, ed avendo supposto $\omega = 0$, tale prodotto risulta nullo. Poiché si è appena provato essere $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \neq 0$, segue che $a_{i_1,\ldots,i_p} = 0$. Data l'arbitrarietà del multi-indice concludiamo che i p-vettori $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$ sono linearmente indipendenti, e che quindi costituiscono un insieme di generatori liberi di cardinalità $\binom{n}{p}$ di $\bigwedge^p M$. □

Corollario 1.12. *Sia M un A-modulo libero di rango n. Allora $\bigwedge(M)$ è un A modulo libero finitamente generato di rango 2^n.*

Dimostrazione. Per il primo punto della proposizione precedente possiamo scrivere $\bigwedge(M) = \bigoplus_{p=0}^n \bigwedge^p M$. Un sistema di generatori liberi è allora individuato dagli elementi $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, e_1, 0, \ldots, 0)$,..., $(0, \ldots, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, \ldots, 0)$,..., $(0, \ldots, 0, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$. Si osservi che possiamo semplicemente indicare ognuno di tali elementi, senza rischio di generare ambiguità, con $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$. Essi sono in numero di

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{p} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{p=0}^{n} 1^p 1^{n-p} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n,$$

che è quindi il rango dell'algebra esterna $\bigwedge(M)$. □

Capitolo 2

Grassmanniane

In questo capitolo entriamo nel vivo del problema che ci siamo proposti di affrontare, la definizione di un oggetto che parametrizzi i sottospazi lineari di dimensione p di uno spazio vettoriale di dimensione n. Abbandoneremo la struttura più generale di modulo, in quanto essa presenta patologie che poco si adattano a una limpida interpretazione geometrica.

Dato un A-modulo M si dicono elementi di torsione quegli x per cui esiste $a \in A \backslash \{0\}$ tale che $ax = 0$. Se indichiamo con T il sottoinsieme di M formato da questi elementi, chiaramente T è non vuoto, in quanto 0 vi appartiene, ma di più, in un modulo qualsiasi T è in generale non nullo. Lo $\mathbb{Z}$-modulo $M = 2\mathbb{Z} \otimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ incontrato precedentemente ci fornisce un esempio di questo fatto: $2 \otimes x$, dove $x = 1 + 2\mathbb{Z}$, è un suo elemento di torsione non nullo. Non solo: poiché, come si può osservare, tale elemento genera M, in questo caso si ha che $T = M$. Quando ciò accade, si dice che M è un modulo di torsione; di questo tipo è anche lo $\mathbb{Z}$-modulo definito a partire dal gruppo abeliano finito $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si osservi che in entrambi i casi si tratta di moduli finitamente generati, il cui insieme di generatori non è libero. Vale infatti il seguente risultato.

Proposizione 2.1. *Sia A un dominio di integrità, e sia M un modulo libero su A. Allora M è privo di torsione, ossia*

$$T = \{x \in M | ax = 0 \text{ per qualche } a \neq 0\} = \{0\}.$$

Dimostrazione. Sia $x \in T$ e sia $a \in A$, $a \neq 0$, tale che $ax = 0$. Decomponiamo x nella base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di M:

$$a(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0,$$

da cui segue, essendo gli e_i linearmente indipendenti, che $a\lambda_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Poiché A è un dominio di integrità, grazie alle n equazioni precedenti concludiamo che $\lambda_i = 0$ per ogni i, il che implica $x = 0$. $\square$

Facciamo infine osservare che se A è un dominio d'integrità, T risulta essere un sottomodulo di M, detto sottomodulo di torsione. L'avere sottomodulo di torsione banale, caratteristica tipica degli spazi vettoriali, fa si che risultati successivi nei quali entra in gioco il teorema di completamento di base si possano estendere anche a questo tipo di moduli, cosa che altrimenti non sarebbe stata possibile. D'ora in avanti, come annunciato, considereremo l'algebra esterna su un K-spazio vettoriale V di dimensione finita, dove $\mathsf{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Salvo specificazioni il discorso sarà valido per entrambi i campi, ma vedremo che, soprattutto quando entrano in gioco proprietà topologiche dello spazio proiettivo, la differenza risulta evidente.

2.1 Vettori totalmente decomponibili

Possiamo individuare un sottospazio lineare di dimensione p di uno spazio vettoriale V di dimensione n tramite un qualsiasi insieme di vettori liberi che lo generano. Ad ognuna di queste basi del sottospazio risulta associato, modulo una moltiplicazione scalare, un unico elemento di $\bigwedge^p V$, il prodotto esterno degli elementi della base, per definizione un p-vettore totalmente decomponibile. Oltre a ciò mostreremo che, viceversa, un multivettore di questo tipo individua univocamente un sottospazio lineare di V. Chiarire tale corrispondenza sarà il primo traguardo del capitolo, e già da questa breve premessa si intuisce come la sua comprensione passi attraverso una caratterizzazione dell'insieme dei vettori totalmente decomponibili di $\bigwedge^p V$.

Definizione 2.2. Sia V un K-spazio vettoriale. Diciamo che un vettore $v \in V$ divide $\omega \in \bigwedge^p V$ se esiste $\psi \in \bigwedge^{p-1} V$ tale che $\omega = \psi \wedge v$ (una tale uguaglianza va pensata in $\bigwedge(V)$).

Lemma 2.3. *Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n, e sia $v \in V$ un vettore non nullo. Si ha che v divide $\omega \in \bigwedge^p V$ se e solo se $\omega \wedge v = 0$.*

Dimostrazione. Se $\omega = \psi \wedge v$, allora $\omega \wedge v = (\psi \wedge v) \wedge v = \psi \wedge (v \wedge v) = \psi \wedge 0 = 0$. Viceversa, sia $\omega \wedge v = 0$. Poiché $v \neq 0$ possiamo considerare una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di V tale che $e_1 = v$. Decomponendo ω nella base di $\bigwedge^p V$ associata alla base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ otteniamo

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p},$$

pertanto

$$\omega \wedge v = \Big(\sum a_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \Big) \wedge e_1 = \sum (-1)^p a_{i_1,\ldots,i_p} e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p},$$

da cui risulta che $\omega \wedge v = 0$. Se $i_1 > 1$, i vettori della forma $e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ sono vettori della base di $\bigwedge^{p+1} V$. Essendo linearmente indipendenti, i loro contributi non possono sommarsi tra loro, e quindi dall'uguaglianza precedente segue che $a_{i_1,\ldots,i_n} = 0$ qualora $i_1 > 1$. Tenendo conto di questo fatto, possiamo scrivere

$$\omega = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_p \leq n} a_{1,i_2,\ldots,i_p} e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = e_1 \wedge \psi',$$

dove abbiamo posto $\psi' = \sum_{2 \leq i_2 < \cdots < i_p \leq n} a_{1,i_2,\ldots,i_p} e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$. Da qui risulta chiaro che $v = e_1$ divide ω, basta porre $\psi = (-1)^p \psi'$. □

Proposizione 2.4. *Sia V un K-spazio vettoriale e siano $x_1, \ldots, x_p \in V$. $x_1, \ldots, x_p$ sono linearmente indipendenti su K se e soltanto se $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $x_1, \ldots, x_p$ siano linearmente indipendenti. Possiamo allora completare $x_1, \ldots, x_p$ ad una base di V. Per la proposizione 1.11, tra gli $\binom{n}{p}$ vettori *liberi* che generano $\bigwedge^p V$ vi sarà anche $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$, che quindi non può essere nullo. Viceversa, sia $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$, e supponiamo ad esempio che sia $x_p = a_1 x_1 + \cdots + a_{p-1} x_{p-1}$, per opportuni coefficienti $a_i \in \mathsf{K}$. Si avrebbe allora che

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_p = x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p-1} \wedge (a_1 x_1 + \cdots + a_{p-1} x_{p-1}) = \cdots = 0,$$

un assurdo. □

Proposizione 2.5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K. Un p-vettore $\omega \in \bigwedge^p V \backslash \{0\}$ è totalmente decomponibile se e solo se $W = \{v \in V | v \text{ divide } \omega\}$ è un K-spazio vettoriale di dimensione p.*

Dimostrazione. Mediante il lemma 2.3 è immediato osservare che, per ogni p-vettore non nullo ω, W è un sottospazio lineare di V. Supponiamo ω totalmente decomponibile, ossia della forma $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ per opportuni $v_i \in V$. Dall'essere $\omega \neq 0$, segue dalla proposizione precedente che $v_1, \ldots, v_p$ sono linearmente indipendenti, ed è chiaro inoltre che tali vettori appartengono a W. Completiamo $v_1, \ldots, v_p$ ad una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, e consideriamo un elemento $w \in W$. w si decompone nella base come $w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Per quanto dimostrato nel lemma precedente, si ha che $\omega \wedge w = 0$, cioè

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = 0.$$

Sviluppando il primo membro dell'equazione si ottiene $a_{p+1} = \cdots = a_n = 0$, pertanto $w \in < v_1, \ldots, v_p >$. Data l'arbitrarietà di w abbiamo

mostrato che i vettori $v_1, \dots, v_p$ costituiscono una base per W, che ha quindi dimensione p.

Viceversa, sia $\{v_1, \dots, v_p\}$ una base per W. Completandola ad una base di V possiamo scrivere ω nel solito modo:

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1,\dots,i_p} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}.$$

Poiché per ipotesi v_1 divide ω, segue dal lemma che $\omega \wedge v_1 = 0$, dove sostituendo al posto di ω la sua espressione di cui sopra ricaviamo che se $1 \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, allora $a_{i_1,\dots,i_p} = 0$. Facendo lo stesso ragionamento su v_2 otteniamo che se anche $2 \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, è $a_{i_1,\dots,i_p} = 0$, e così via fino a v_p. Si ha allora che nella scrittura di ω come combinazione lineare dei vettori della base di $\bigwedge^p V$ l'unico coefficiente non nullo è $a_{1,\dots,p}$, ossia $\omega = a_{1,\dots,p} v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ è un p-vettore totalmente decomponibile. $\square$

La seguente proposizione e il relativo corollario sono molto importanti, in quanto mostrano come il prodotto esterno di vettori di V contenga informazioni sul rango della matrice che questi individuano una volta fissata una base dello spazio vettoriale.

Proposizione 2.6. *Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n, $\{e_1, \dots, e_n\}$ una sua base fissata, e siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Vale allora la seguente uguaglianza:*

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \det(A) e_1 \wedge \dots \wedge e_n,$$

dove $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ è la matrice di passaggio dalla base $\{e_1, \dots, e_n\}$ all'insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$, ovvero la matrice nella quale i coefficienti del j-esimo vettore colonna corrispondono ai coefficienti della decomposizione del vettore v_j rispetto alla base $\{e_i\}$, $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, $1 \le j \le n$.

Dimostrazione. Se i v_j sono linearmente dipendenti allora $\det(A) = 0$, e il risultato segue dalla proposizione 2.4. Supponiamo che $v_1, \dots, v_n$ siano liberi (essi formano dunque una base di V), e proviamo il risultato per induzione su $\dim(V) = n$. Per $\dim(V) = 1$ l'enunciato è banale. Supponiamo l'asserto vero per $\dim(V) = n - 1$, e dimostriamo che allora esso segue per $\dim(V) = n$. A meno di riordinare gli indici della base $\{e_i\}$ possiamo supporre $a_{11} \neq 0$. Se poniamo $v'_1 = v_1$ e, per $2 \le j \le n$, $v'_j = v_j - \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} v_1$, i vettori $v'_1, \dots, v'_n$ risultano anch'essi liberi, e formano quindi una nuova base per V. Per come li abbiamo definiti, la matrice B di passaggio dalla base $\{e_i\}$ alla base formata da questi vettori sarà della

forma

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix},$$

dove, per ogni $i, j \in \{2, \dots n\}$, $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1}$. Poiché, come sappiamo, le operazioni tramite le quali siamo passati dalla matrice A alla matrice B non cambiano valore al determinante, si ha che $\det(B) = \det(A)$. Se poi definiamo $A' = (a'_{ij})_{2 \le i,j \le n}$, abbiamo che $\det(A) = a_{11} \cdot \det(A')$. Ora, essendo $\det(A') \neq 0$, risulta chiaro che $\{e_2, \dots, e_n\}$ e $\{v'_2, \dots, v'_n\}$ generano lo stesso sottospazio vettoriale, di dimensione $n-1$, di V. Entrambi gli insiemi sono basi per tale sottospazio, e A' è la matrice di cambiamento di base. Dall'ipotesi induttiva si ha $v'_2 \wedge \cdots \wedge v'_n = \det(A') e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$, pertanto:

$$\begin{aligned} v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_n &= \det(A') v'_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \det(A')(a_{11} e_1 + \cdots + a_{n1} e_n) \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= a_{11} \det(A') e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n = \det(A) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Si conclude osservando che $v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_n = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$. □

Corollario 2.7. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K, e sia $e_1, \dots, e_n$ una sua base. Siano $v_1, \dots, v_p \in V$, $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Se*

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

è la rappresentazione di $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ rispetto alla base di $\bigwedge^p V$ definita a partire dalla base $e_1, \dots, e_n$ come nella proposizione 1.11, valgono le uguaglianze

$$a_{i_1, \dots, i_p} = \det A_{i_1, \dots, i_p},$$

dove $A_{i_1, \dots, i_p}$ è la matrice quadrata di ordine p avente come k-esima riga la riga i_k della matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$.

Dimostrazione. Per semplificare le notazioni supponiamo $i_1 = 1, \dots, i_p = p$. Poniamo $v_{p+1} = e_{p+1}, \dots, v_n = e_n$, e sia B la matrice di passaggio dalla base $\{e_1, \dots, e_n\}$ all'insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$. Tale matrice è della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{p+1,1} & \cdots & a_{p+1,p} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

da cui segue (sviluppando il determinante secondo Laplace a partire dall'ultima colonna) che $\det(B) = \det(A_{1,\dots,p})$. Per la proposizione precedente si ha che

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \det(B) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \det(A_{1,\dots,p}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

e sfruttando la decomposizione di $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ nella base $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\}$ si ottiene infine

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \wedge e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n =$$

$$\left(\sum a_{i_1,\dots,i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \right) \wedge e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n = a_{1,\dots,p} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

da cui la tesi. □

2.2 Algebra esterna e dualità

V sia sempre uno spazio vettoriale di dimensione finita su K. Abbiamo già ricordato che gli elementi di V^* sono forme lineari su V; se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di V, la base duale ad essa associata, che si indica con $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, è tale che $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker. Grazie all'isomorfismo canonico tra V e V^{**} il discorso appena fatto può essere ripetuto invertendo i ruoli di V e V^*, e possiamo quindi vedere gli elementi di V come funzionali lineari su V^*.

Esempio 2.8. Sia $V = \mathsf{K}^2$. Consideriamo $(\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)$. Per linearità possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = \\
&\beta_1 (\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*)(e_1) + \beta_2 (\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*)(e_2) = \\
&\alpha_1 \beta_1 e_1^*(e_1) + \alpha_1 \beta_2 e_1^*(e_2) + \alpha_2 \beta_1 e_2^*(e_1) + \alpha_2 \beta_2 e_2^*(e_2) = \\
&\alpha_1 \beta_1 + \alpha_{2\beta_2}.
\end{aligned}$$

Questo semplice esempio mostra la simmetria tra i ruoli di $(\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^*)$ e $(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)$. Definiamo un prodotto scalare tra due vettori $u \in V$ e $w^* \in V^*$ come:

$$\langle w^*, u \rangle = \langle u, w^* \rangle = w^*(u) = u(w^*).$$

Riprendiamo l'importante osservazione fatta in 1.7; nel caso particolare dell'algebra esterna questa ci dice che un elemento di $\bigwedge^p V$ è un'applicazione p-alternante su $V^* \times \cdots \times V^*$ (p *volte*). La definizione di prodotto scalare tra spazi duali si può estendere nel caso di p-vettori. Per i dettagli rimandiamo al testo [2].

Definizione 2.9. Definiamo un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ tra $\bigwedge^p V$ e $\bigwedge^p V^*$ nella maniera seguente:

$$\left.\begin{array}{l} \langle w_1^* \wedge \cdots \wedge w_p^*, u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \rangle = \det((a_{ij})) \text{ per } p \geq 1 \\ \langle \lambda, \mu \rangle \text{ per } \lambda, \mu \in \mathsf{K} \\ \langle \bigwedge^p V^*, \bigwedge^q V \rangle \text{ se } p \neq q \end{array}\right\},$$

dove $a_{ij} = \langle w_i^*, u_j \rangle \in \mathsf{K}$.

Osserviamo che la linearità permette di limitare la definizione ai vettori totalmente decomponibili. Espandendo il determinante della formula a partire dalla j-esima colonna otteniamo, per ogni $p \geq 2$,

$$\langle w_1^* \wedge \cdots \wedge w_p^*, u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+j} \langle w_i^*, u_j \rangle \cdot \langle w_1^* \wedge \cdots \wedge \check{w}_i^* \wedge \cdots \wedge w_p^*, u_1 \wedge \cdots \wedge \check{u}_j \wedge \cdots \wedge u_p \rangle, \quad (2.1)$$

dove $\check{w}_i^*$ indica che consideriamo il $(p-1)$-vettore in cui non compare w_i^*. Si osserva immediatamente che

$$\langle e_{\mu_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\mu_p}^*, e_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\nu_p} \rangle = \det((\delta_{\mu_i \nu_j})).$$

Quest'ultima uguaglianza mostra che, se $u = \sum u_{\nu_1, \ldots, \nu_p} e_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\nu_p}$, $w^* = \sum w^*_{\mu_1, \ldots, \mu_p} e^*_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{\mu_p}$, allora

$$\langle w^*, u \rangle = \sum_{1 \leq \mu_1 < \cdots < \mu_p \leq n} u_{\mu_1, \ldots, \mu_p} w^*_{\mu_1, \ldots, \mu_p}, \quad (2.2)$$

Infatti il prodotto scalare $\langle e_{\mu_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\mu_p}^*, e_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\nu_p} \rangle$ è uguale a zero qualora $\{\nu_1, \ldots, \nu_p\} \neq \{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$ — se ad esempio $\mu_1 \notin \{\nu_1, \ldots, \nu_p\}$, la matrice $(\delta_{\mu_i \nu_j})$ possiede la prima riga nulla —, mentre chiaramente $\langle e_{\mu_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{\mu_p}^*, e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_p} \rangle = 1$.

2.3 Topologie sullo spazio proiettivo

Ricordiamo che lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathsf{K})$ (o più semplicemente $\mathbb{P}^n$, a meno che non occorra distinguere tra i casi reale e complesso) è l'insieme i cui punti rappresentano le rette per l'origine dello spazio vettoriale K^{n+1},

$$\mathbb{P}^n = \{[x_0, \ldots, x_n] | x_i \in \mathsf{K}, [x_0, \ldots, x_n] \neq [0, \ldots, 0]\}.$$

Abbiamo già sottolineato come questa definizione rientri in quella più generale di grassmanniana. Se indichiamo la grassmanniana dei sottospazi vettoriali di dimensione p di K^n con la notazione $G(p, n)$, allora $\mathbb{P}^n = G(1, n+1)$. Facciamo poi osservare che si può assumere un punto di vista

'proiettivo' e considerare la grassmanniana degli spazi lineari di dimensione p di $\mathbb{P}^n$, che in questo caso si usa indicare con $\mathbb{G}(p,n)$. Naturalmente si ha $\mathbb{G}(p,n) = G(p+1, n+1)$. Nel seguito, usando la notazione $G(p,n)$, ammetteremo la grassmanniana definita a partire tanto da $\mathbb{C}^n$ quanto da $\mathbb{R}^n$. Nel caso sia necessario fare distinzioni scriveremo invece $G(p, \mathbb{C}^n)$, $G(p, \mathbb{R}^n)$ rispettivamente. Tale notazione è quella comunemente adottata qualora ci si voglia riferire alla grassmanniana dei p-sottospazi di un generico K-spazio vettoriale V: $G(p, V)$. Tuttavia, una volta fissata una base di V, l'isomorfismo canonico con l'n-spazio numerico K^n ci permette di fare riferimento semplicemente a $G(p,n)$.

Consideriamo l'insieme

$$U_0 = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n | x_0 \neq 0\}.$$

I suoi punti rapprentano quelle rette passanti per l'origine di K^{n+1} che intersecano l'iperpiano di equazione $x_0 = 1$. Precisamente la retta vettoriale $\{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) | \lambda \in \mathsf{K}\}$, associata al generico punto $[x_0, \dots, x_n]$ di U_0 interseca tale iperpiano nel punto $(1, x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$. Questa assegnazione, chiaramente biiettiva, ci permette di identificare U_0 con K^n:

$$\begin{array}{ccccc} U_0 & \xrightarrow{\simeq} & (x_0 = 1) \subset \mathsf{K}^{n+1} & \xrightarrow{\simeq} & \mathsf{K}^n \\ \left[1, \dfrac{x_1}{x_0}, \dots, \dfrac{x_n}{x_0}\right] & \longmapsto & \left(1, \dfrac{x_1}{x_0}, \dots, \dfrac{x_n}{x_0}\right) & \longmapsto & \left(\dfrac{x_1}{x_0}, \dots, \dfrac{x_n}{x_0}\right). \end{array} \tag{2.3}$$

I punti di $\mathbb{P}^n$ che non appartengono ad U_0 sono quelli associati alle rette appartenenti all'iperpiano $(x_0 = 0)$ di K^{n+1}, e sono della forma $[0, x_1, \dots, x_n]$; l'insieme di tali punti risulta chiaramente isomorfo ad uno spazio proiettivo di dimensione $n-1$. Possiamo pensare ad U_0 come alla 'parte finita' di $\mathbb{P}^n$, mentre i restanti punti rappresentano i punti all'infinito, uno per ogni direzione di K^n. Abbiamo così ottenuto la seguente decomposizione:

$$\mathbb{P}^n = \mathsf{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1},$$

e iterando il ragionamento possiamo scrivere

$$\mathbb{P}^n = \mathsf{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1} = \dots = \mathsf{K}^n \cup \dots \cup \mathsf{K} \cup \mathbb{P}^0 = \mathsf{K}^n \cup \dots \cup \mathsf{K} \cup \{\infty\},$$

dove ∞ è il cosiddetto 'punto all'infinito'. Chiaramente la scelta di considerare U_0 come parte finita di $\mathbb{P}^n$ è solo una questione di punti di vista, e avremo potuto ripetere lo stesso ragionamento su uno qualsiasi degli U_i, dove per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$ U_i rappresenta l'insieme dei punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ aventi i-esima coordinata non nulla.

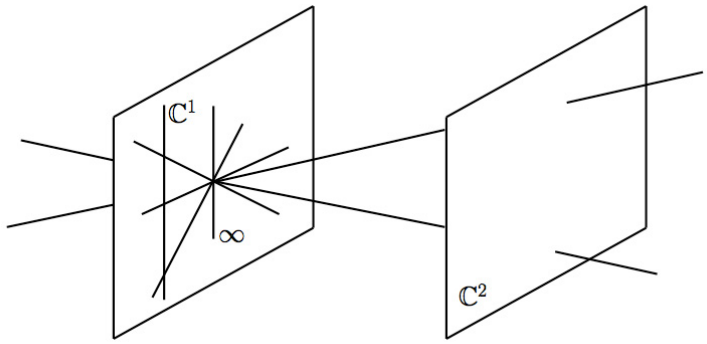

Figura 2.1: Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$

Poiché ogni punto dello spazio proiettivo ammette almeno una coordinata omogenea non nulla, abbiamo che $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$. Questo fatto ci permetterà di vedere $\mathbb{P}^n$ come una varietà topologica. Ricordiamone la definizione:

Definizione 2.10. Sia n un intero positivo. Una varietà topologica di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff X a base numerabile tale che ogni $x \in X$ possieda un intorno aperto U_x omeomorfo ad un aperto di K^n.

Se vogliamo dotare $\mathbb{P}^n$ di una tale struttura, il primo problema che si pone è quello di definire su di esso un'opportuna topologia che permetta di separare i suoi punti. Consideriamo prima il solo caso reale. Ci chiediamo come definire in maniera coerente una 'distanza' tra due rette passanti per l'origine di $\mathbb{R}^{n+1}$. A tal fine consideriamo la sfera unitaria $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e siano p e q due rette per l'origine. Ognuna di esse interseca la sfera in due punti (P, P' e Q, Q' rispettivamente), ed è univocamente determinata la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio unitario cui tali punti appartengono, definita come l'intersezione tra S^{n-1} e il piano generato da r ed s. È facile osservare come P, P', Q, Q' suddividano $\mathcal{C}$ in quattro archi, due a due congruenti. Definiamo $\delta(r, s) = \delta([r], [s]) = \min\{\alpha, \beta\}$, dove α, β sono le lunghezze di due archi consecutivi, $\alpha + \beta = \pi$, e dove con $[r]$ indichiamo il punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ corrispondente alla retta r. Si osservi che la funzione δ non definisce una distanza, in quanto essa non verifica la disuguaglianza triangolare, ma per noi sarà più che sufficiente: la topologia che definiremo grazie ad essa risulterà abbastanza fine da rendere continue certe applicazioni, ma non al punto da evitare a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di godere della proprietà di compattezza.

Sia $\mathcal{F}$ la famiglia formata dagli insiemi

$$B_d(p_0) = \{p \in \mathbb{P}^n | \delta(p, p_0) < d\},$$

al variare di p_0 in $\mathbb{P}^n$ e di d in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, e sia $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ la meno fine tra le topologie su $\mathbb{P}^n$ contenenti $\mathcal{F}$. Il risultato seguente mostrerà che tale topologia è consistente.

Proposizione 2.11. *Sia X un insieme non vuoto, e sia $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tali che:*

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;
2. *per ogni $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.*

Allora esiste una e una sola topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base, e questa è la meno fine tra tutte le topologie $\mathcal{T}$ che contengono $\mathcal{B}$, ossia

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \bigcap_{\mathcal{B} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto X e $\varnothing$ appartengono a $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, il primo per il punto *1*, il secondo in quanto unione della famiglia vuota di elementi di $\mathcal{B}$. Sia $\{V_i\}_{i \in I}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, si ha che

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J(i)} B_j \right) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}},$$

dove $B_j \in \mathcal{B}$ e, per ogni i, $J(i)$ è un opportuno insieme di indici. Infine, se $V_1 = \bigcup_{h \in H} B_h$, $V_2 = \bigcup_{k \in K} B_k$, allora

$$V_1 \cap V_2 = \left(\bigcup_{h \in H} B_h \right) \cap \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) = \bigcup_{\substack{h \in H \\ k \in K}} (B_h \cap B_k),$$

che appartiene a $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ in quanto per ipotesi $B_h \cap B_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Dimostriamo ora che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \bigcap_{\mathcal{B} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}$, da cui seguirà anche l'unicità. Chiaramente $\bigcap_{\mathcal{B} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, in quanto $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Viceversa, preso un qualsiasi aperto $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, essendo $\mathcal{B}$ una base per questa topologia si ha che $V = \bigcup_{j \in J} B_j$. Poiché ogni topologia $\mathcal{T}$ di cui si fa l'intersezione contiene $\mathcal{B}$, si ha che $B_j \in \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ qualunque sia j, il che implica $U \in \bigcap_{\mathcal{B} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}$, da cui la tesi. $\square$

Per poter sfruttare la proposizione dobbiamo verificare che $\mathcal{F}$ soddisfi il punto *2*. Una tale richiesta è equivalente ad imporre la condizione

2′. Per ogni x in $A \cap B$ esiste $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subset A \cap B$,

che risulta chiaramente soddisfatta da $\mathcal{F}$. In effetti $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ non è altro che la topologia indotta dalla metrica euclidea su $\mathbb{P}^n$, ottenuto quozientando la sfera unitaria con la relazione antipodale $\sim$. Per dimostrarlo occorre far vedere che ogni aperto di $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ è un aperto della topologia quoziente, e viceversa. Possiamo limitarci a considerare aperti delle rispettive basi. Sia $B_d(p_0) \in \mathcal{F}$, e consideriamo l'applicazione π^{-1} che ad ogni punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ associa la corrispondente retta per l'origine in $\mathbb{R}^{n+1}$. L'immagine di $B_d(p_0)$ tramite tale applicazione per definizione di δ interseca S^n in due calotte sferiche $+C, -C$. Tali calotte sono aperti della topologia indotta su S^n dalla metrica eucildea, che si possono pensare ottenute nel modo seguente. Sia $r = \pi^{-1}(p_0)$, e siano $+R, -R$ i punti di intersezione tra r e S^n. Allora $\pm C$ si può ottenere, in base al teorema della corda, come intersezione tra la sfera unitaria e la bolla $B_{2\sin\frac{d}{2}}(\pm R)$. Abbiamo così mostrato che $B_d(p_0)$ è un aperto della topologia quoziente su $S^n/\sim$, in quanto la sua preimmagine tramite la proiezione $\rho : S^n \longrightarrow S^n/\sim$ è un aperto dello spazio topologico S^n dotato della topologia indotta dalla matrica euclidea. Il viceversa è del tutto analogo.

Si osserva immediatamente come $\mathbb{P}^n$, dotato della topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$, sia uno spazio di Hausdorff. Mostriamo che gli U_i definiti sopra sono insiemi aperti per tale topologia. Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ che ad un punto p associa il valore

$$\delta(p, \complement U_i) = \min\{\delta(p, q) | q \in \complement U_i\},$$

dove $\complement U_i$ indica l'iperpiano $(x_i = 0)$, complementare dell'insieme U_i. Chiaramente f è continua, ed U_i risulta aperto dall'essere $\complement U_i$ chiuso in quanto preimmagine dello 0 tramite una funzione continua. Poiché per quanto visto precedentemente $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$, ogni punto $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ammette un intorno isomorfo a $\mathbb{R}^n$, e lo spazio proiettivo reale risulta essere una varietà topologica.

Con questo esempio abbiamo voluto mostrare un metodo 'manuale' per costruire una topologia sullo spazio proiettivo che renda quest'ultimo una varietà topologica. Ma si può dire molto di più. Ricordiamo che un omeomorfismo (funzione continua e invertibile con inversa continua) φ_U di un aperto U di X su un aperto di K^n viene detto n-carta locale. Una famiglia di carte locali $\{\varphi_{U_i}\}_{i \in I}$ tali che $\{U_i\}_{i \in I}$ costituisce un ricoprimento di X si dice atlante su X. L'assegnazione 2.3 definisce le

seguenti carte locali:

$$\begin{aligned} \varphi_0 : [x_0, \dots, x_n] &\longmapsto \left(\tfrac{x_1}{x_0}, \dots, \tfrac{x_n}{x_0}\right), \\ &\vdots \\ \varphi_n : [x_0, \dots, x_n] &\longmapsto \left(\tfrac{x_0}{x_n}, \dots, \tfrac{x_{n-1}}{x_n}\right), \end{aligned}$$

dove $\varphi_i = \varphi_{U_i}$, $0 \leq i \leq n$. Tramite le φ_i otteniamo immediatamente che $\mathbb{P}^n$ è una varietà topologica, e un tale approccio, a differenza della costruzione precedente, è valido tanto nel caso reale quanto in quello complesso. Queste stesse applicazioni, inoltre, mostrano che $\mathbb{P}^n$ è una varietà differenziabile, concetto che andiamo ora a introdurre.

2.4 Varietà differenziabili

Definizione 2.12. Sia X uno spazio topologico, U, V due aperti di X. Due n-carte locali (U, φ_U), (V, φ_V) si dicono $\mathcal{C}^k$-compatibili se $U \cap V = \varnothing$ oppure se $U \cap V$ è non vuoto e l'applicazione 'cambio di coordinate'

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \subset \mathsf{K}^n \longrightarrow \varphi_V(U \cap V) \subset \mathsf{K}^n$$

è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$, che ricordiamo essere una funzione invertibile e, assieme alla sua inversa, continua e derivabile, con derivate continue fino all'ordine k.

Definizione 2.13. Un n-atlante differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ nello spazio topologico X è una famiglia di n-carte locali $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tale che $\{U_i\}$ sia un ricoprimento di X, e tale che le carte locali (U_i, φ_i) siano a due a due $\mathcal{C}^k$ compatibili.

Se X è uno spazio di Hausdorff a base numerabile si dice che l'n-atlante $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ definisce su X una struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ se $k \geq 1$ e, come abbiamo visto, di varietà topologica se $k = 0$. L'intero n è la dimensione della varietà X. D'ora in poi, se ci riferiremo ad applicazioni o varietà differenziabili, senza specificare oltre, sottintenderemo che si tratti di applicazioni o verietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^\infty$, e in questo caso si parla di varietà liscia.Facciamo poi notare che se $\mathsf{K} = \mathbb{C}$ si usano adottare i termini funzione olomorfa (o analitica), anziché funzione differenziabile, e varietà analitica anziché differenziabile. Come sappiamo, nel caso di funzioni differenziabili in senso complesso, una funzione che ammette derivata prima ne ammette infinite e in questo caso non occorre specificare oltre.

Dopo aver dato queste definizioni, torniamo alle carte locali su $\mathbb{P}^n$. Ossrviamo che esse sono $\mathcal{C}^\infty$-compatibili, in quanto le mappe cambio di coordinate, come ad esempio

$$\varphi_n \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0 \cap U_n) \longrightarrow \varphi_n(U_0 \cap U_n),$$

che ad $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathsf{K}^n$ associa

$$\varphi_n \circ \varphi_0^{-1}(a_1, \ldots, a_n) = \varphi_n([1, a_1, \ldots, a_n]) = \left(\frac{1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\right),$$

sono infinitamente differenziabili (risp. olomorfe).

Partendo da quanto fatto su $\mathbb{P}^n$, estendiamo il ragionamento ad una generica grassmanniana $G(p, n)$, dotandola della struttura di varietà differenziabile. Come al solito, sia V un K-spazio vettoriale, e sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una sua base fissata. Dato un sottospazio lineare W di dimensione p di V, possiamo rappresentare W tramite la matrice $n \times p$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

le cui p colonne corrispondono ai p vettori $a_j = a_{1j}e_1 + \ldots a_{nj}e_n$ di una base di W.[1] Chiamiamo una tale matrice *matrice rappresentativa di W*. Chiaramente essa ha rango massimo p, in quanto i suoi vettori colonna sono linearmente indipendenti. Poiché la base di W non è unica, la matrice rappresentativa di un sottospazio non è univocamente determinata. Il legame tra le diverse matrici rappresentative è stabilito da un noto risultato di algebra lineare.

Proposizione 2.14. *Sia W un sottospazio di dimensione p di un K-spazio vettoriale V di dimensione n, e siano $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$ due matrici rappresentative di W. Allora esiste una matrice $G \in \mathrm{GL}_p(\mathsf{K})$ (sottoinsieme di $\mathcal{M}_p(\mathsf{K})$ costituito dalle matrici invertibili) tale che $A = A'G$. Questo fatto si esprime dicendo che la matrice rappresentativa di W è unica a meno di un'azione del gruppo lineare $\mathrm{GL}_p(\mathsf{K})$. Viceversa, date due matrici $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$ di rango massimo p tali che $A = A'G$ per una certa $G \in \mathrm{GL}_p(\mathsf{K})$, i rispettivi vettori colonna generano lo stesso sottospazio lineare di dimensione p di V.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima il viceversa. Da $A = A'G$ abbiamo che

$$a_{ij} = A'^{(i)}G_{(j)} = a'_{i1}g_{1j} + \cdots + a'_{ip}g_{pj}. \tag{2.4}$$

[1] Raccomandiamo particolare attenzione alle notazioni adottate: una lettera con un indice al pedice indica un vettore di V, mentre una lettera con due indici al pedice uno scalare in K.

Per ogni $j = 1, \dots, p$ siano a_j, a'_j come in figura:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a'_1 & \cdots & a'_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}$$

$$a_j = a_{1j}e_1 + \dots a_{nj}e_n \qquad a'_j = a'_{1j}e_1 + \dots a'_{nj}e_n.$$

Dimostriamo che $\mathrm{Span}(a_1, \dots, a_p) = \mathrm{Span}(a'_1, \dots, a'_p)$. Innanzitutto, avendo A e A' rango massimo, gli insiemi $\{a_1, \dots, a_p\}$, $\{a'_1, \dots, a'_p\}$ sono linearmente indipendenti, pertanto generano un sottospazio di dimensione p di V. Riguardando le 2.4 come relazioni sulle componenti del generico vettore a_j otteniamo

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}g_{1j} + \cdots + a'_{1p}g_{pj} \\ \vdots \\ a'_{n1}g_{1j} + \cdots + a'_{np}g_{pj} \end{pmatrix} = g_{1j}a'_1 + \cdots + g_{pj}a'_p,$$

ossia per ogni $j = 1, \dots, p$, a_j è combinazione lineare dei vettori $a_1, \dots, a_p$. Questo implica che $\mathrm{Span}(a_1, \dots, a_p) \subset \mathrm{Span}(a'_1, \dots, a'_p)$, e trattandosi di sottospazi della stessa dimensione abbiamo l'uguaglianza. Dimostriamo ora la prima parte della proposizione. Per ipotesi $\mathrm{Span}(a_1, \dots, a_p) = W = \mathrm{Span}(a'_1, \dots, a'_p)$, da cui $\{a_1, \dots, a_p\} \in \mathrm{Span}(a'_1, \dots, a'_p)$. Possiamo allora esprimere gli a_j come combinazione lineare di $a'_1, \dots, a'_p$,

$$\begin{gathered} a_1 = g_{11}a'_1 + \cdots + g_{p1}a'_p \\ \cdots \\ a_p = g_{1p}a'_1 + \cdots + g_{pp}a'_p. \end{gathered}$$

Esprimendo ciscuna di queste p equazioni vettoriali per componenti otteniamo np equazioni scalari

$$a_{ij} = g_{1j}a'_{i1} + \cdots + g_{pj}a'_{ip} = a'_{i1}g_{1j} + \cdots + a'_{ip}g_{pj},$$

che possiamo scrivere in forma matriciale come $A = A'G$, dove G è una matrice quadrata di ordine p. Essendo gli a_j linearmente indipendenti, tali sono anche le loro componenti rispetto ai vettori $a'_1, \dots, a'_p$ (si completi $\{a'_1, \dots, a'_p\}$ ad una base di V), perciò $G \in \mathrm{GL}_p(\mathsf{K})$. $\square$

Anziché associare ad un sottospazio W la matrice dei vettori di una sua base $\{a_1, \dots, a_p\}$, possiamo associargli il p-vettore in $\bigwedge^p V$ $a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$. Le proprietà dimostrate nel caso delle matrici rappresentative si deducono facilmente nel caso dei p-vettori rappresentativi sfruttando i risultati

precedenti. Infatti, per il corollario 2.7, se $\{a'_1, \dots, a'_p\}$ è un'altra base di W si ha che

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_p = \det(G) a'_1 \wedge \cdots \wedge a'_p,$$

dove $G \in \mathrm{GL}_p(\mathsf{K})$ è la matrice di passaggio dalla base $\{a'_j\}$ alla base $\{a_j\}$. Siano sempre W un sottospazio di dimesione p di V, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$ una sua matrice rappresentativa. Ricordiamo che con $A_{i_1,\dots,i_p}$, $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$, indichiamo il minore di ordine p ottenuto da A prendendo le righe $i_1, \dots, i_p$. Poniamo inoltre $\Delta_{i_1,\dots,i_p} = \det(A_{i_1,\dots,i_p})$. Poiché, come abbiamo visto, la matrice A è di rango massimo, almeno uno degli $\binom{n}{p}$ scalari $\Delta_{i_1,\dots,i_p}$ è non nullo. Sempre per quanto visto in 2.7, $\Delta_{i_1,\dots,i_p}$ non è altro che il coefficiente che moltiplica $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ nella decomposizione di $a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$ sulla base di $\bigwedge^p V$. Al variare della base di W variano la matrice rappresentativa e di conseguenza i coefficienti del p-vettore rappresentativo. Tuttavia, per quanto mostrato precedentemente, W individua a meno di un fattore moltiplicativo un elemento di $\bigwedge^p V$, e ciò significa che risulta ben definita la mappa

$$\begin{array}{rcl} \Psi : G(p,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\bigwedge^p V) \\ W & \longmapsto & [a_1 \wedge \cdots \wedge a_p] \end{array},$$

dove abbiamo identificato un sottospazio W con il punto ad esso corrispondente in $G(p,n)$. Mostriamo subito che questa mappa, detta *mappa di Plücker*, è iniettiva, cosa che ci permetterà di riguardare la grassmanniana $G(p,n)$ come un sottoinsieme dello spazio proiettivo. Per dimostrarlo si considerino due sottospazi di dimensione p di V, W e Z. Siano $\{w_1, \dots, w_p\}$ una base di W, $\{z_1, \dots, z_p\}$ una base di Z. Se $\Psi(W) = \Psi(Z)$ esiste $\lambda \in \mathsf{K}$, $\lambda \neq 0$, tale che $w_1 \wedge \cdots \wedge w_p = \lambda z_1 \wedge \cdots \wedge z_p$. Allora si ha che

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \wedge z_i = \lambda z_1 \wedge \cdots \wedge z_p \wedge z_i = 0$$

per ogni $i = 1, \dots, p$. Per la proposizione 2.4 si ha che per ogni i, z_i è combinazione lineare di $w_1, \dots, w_p$, da cui segue che $Z \subset W$, e dall'essere $\dim(W) = \dim(Z)$ abbiamo l'uguaglianza dei due sottospazi, da cui la tesi. Possiamo esprimere meglio l'immagine di un sottospazio tramite la mappa di Plücker servendoci della proposizione 1.11. Essa ci dice che $\mathbb{P}(\bigwedge^p V) \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{p}-1}$, e per quanto dimostrato si ha

$$\begin{array}{rcl} \Psi : G(p,n) & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\binom{n}{p}-1} \\ W & \longmapsto & [\Delta_{1,\dots,p}, \dots, \Delta_{n-p+1,\dots,n}] \end{array}.$$

$[\Delta_{1,\dots,p}, \dots, \Delta_{n-p+1,\dots,n}]$ vengono dette coordinate plückeriane del sottospazio W; come la mappa Ψ che le definisce, esse prendono il nome dal matematico e fisico tedesco Julius Plücker (1801-1868), che per primo le utilizzò.

Come abbiamo visto, se A è tale che $\Delta_{i_1,\dots,i_p} \neq 0$ per un certo indice $i_1, \dots, i_p$, qualsiasi altra matrice rappresentativa A' di W è tale che $\Delta_{i_1,\dots,i_p} \neq 0$. Infatti $\det(A'_{i_1,\dots,i_p}) = \det(A_{i_1,\dots,i_p}) \det(G)$, ed poiché $G \in \mathrm{GL}_p(K)$ il suo determinante è non nullo. È quindi ben definito l'insieme

$$U_{i_1,\dots,i_p} = \{W \in G(p,n) | \Delta_{i_1,\dots,i_p} \neq 0\},$$

Consideriamo, per semplificare le notazioni, $U_{1,\dots,p}$. Ad ogni W in $U_{1,\dots,p}$ è associata una e una sola matrice della forma

$$A^{1,\dots,p} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_{p+1,1} & \cdots & \alpha_{p+1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,p} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

per ottenerla basta moltiplicare una qualsiasi matrice rappresentativa A di W per $(A_{1,\dots,p})^{-1}$, che chiaramente appartiene a $\mathrm{GL}_p(\mathsf{K})$. Per la proposizione 2.14, inoltre, ogni matrice di questa forma determina un unico sottospazio in $G(p,n)$, abbiamo così stabilito una biiezione

$$\varphi_{1,\dots,p} : U_{1,\dots,p} \longrightarrow \mathsf{K}^{p(n-p)}.$$

Osservazione 2.15. I punti di $U_{1,\dots,p}$ rappresentano quei sottospazi lineari di dimensione p di V che sono in somma diretta con $\mathrm{Span}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Sia W uno di questi sottospazi, da 2.5 appare subito chiaro come una base di W possa essere completata ad una base di V aggiungendovi i vettori $e_{p+1}, \dots, e_n$. Si osservi inoltre che per ogni j, $1 \leq j \leq p$, il j-esimo vettore colonna della matrice $A^{1,\dots,p}$ rappresenta l'unico punto di intersezione tra W e il sottospazio affine $\mathrm{Span}(e_{p+1}, \dots, e_n) + e_j$: un generico elemento di quest'ultimo è della forma

$$(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_n),$$

e chiaramente l'unico vettore di W che possiede $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ come prime p coordinate è il j-esimo vettore colonna di $A^{1,\dots,p}$.

Naturalmente, quanto detto fino ad ora riguardo $U_{1,\dots,p}$ sussiste per qualsiasi sottoinsieme $U_{i_1,\dots,i_p}$ di $G(p,n)$. La funzione che ad una matrice $n \times p$ associa $\Delta_{i_1,\dots,i_p}$ è chiaramente continua in $\mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$, in quanto il determinante non è altro che una funzione polinomiale. Da ciò segue facilmente che gli insiemi $U_{i_1,\dots,i_p}$ sono aperti dello spazio topologico $G(p,n)$ con la topologia indotta da $\mathbb{P}^{\binom{n}{p}-1}$. La carta affine $\varphi_{i_1,\dots,i_p}$

sull'aperto $U_{i_1,\dots,i_p}$ si ottiene dunque associando a W il punto di $\mathsf{K}^{p(n-p)}$ dato dall'unica matrice rappresentativa di W della forma 2.5, dove il minore $A_{i_1,\dots,i_p}$ coincide con la matrice identità. Se consideriamo di nuovo, a titolo di esempio, l'aperto $U_{1,\dots,p}$, la generica coordianata $\alpha_{i,j}$, $1 \leq i \leq n-p$, $1 \leq j \leq p$, si esprime come rapporto

$$\alpha_{i,j} = \frac{\Delta_{1,\dots,j-1,p+i,j+1,\dots,p}}{\Delta_{1,\dots,p}},$$

dove $\Delta_{i_1,\dots,i_p}$ sono i determinanti dei minori $A_{i_1,\dots,i_p}$ di una qualsiasi matrice rappresentativa A di W. Abbiamo così dimostrato che le carte locali $\varphi_{i_1,\dots,i_p}$ sono funzioni continue. Le funzioni inverse $(\varphi_{i_1,\dots,i_p})^{-1}$ sono chiaramente continue. Dimostriamo infine che le funzioni cambio di coordinate $\varphi_{i_1,\dots,i_p} \circ (\varphi_{i'_1,\dots,i'_p})^{-1}$ sono infinitamente differenziabili su $\varphi_{i_1,\dots,i_p}(U_{i_1,\dots,i_p} \cap U_{i'_1,\dots,i'_p})$. Osserviamo innanzitutto che $\varphi_{i_1,\dots,i_p}(U_{i_1,\dots,i_p} \cap U_{i'_1,\dots,i'_p})$ è aperto in $\mathsf{K}^{p(n-p)}$, in quanto il suo complementare è preimmagine dello zero tramite una funzione polinomiale. Sia $W \in U_{i_1,\dots,i_p} \cap U_{i'_1,\dots,i'_p}$ e A una sua matrice rappresentativa. Consideriamo la matrice $A^{i_1,\dots,i_p}$ ottenuta moltiplicando A per la matrice $(A_{i_1,\dots,i_p})^{-1}$, che esiste in quanto $W \in U_{i_1,\dots,i_p}$. Sia $A^{i_1,\dots,i_p}_{i'_1,\dots,i'_p}$ il minore $p \times p$ ottenuto da $A^{i_1,\dots,i_p}$ prendendo e righe $i'_1, \dots, i'_p$. Poiché $W \in U_{i'_1,\dots,i'_p}$, tale matrice risulta invertibile, e abbiamo che

$$A^{i'_1,\dots,i'_p} = A^{i_1,\dots,i_p} \left(A^{i_1,\dots,i_p}_{i'_1,\dots,i'_p} \right)^{-1}.$$

Da tale uguaglianza segue che le coordinate α'_{hk} si ottengono come rapporti tra polinomi nelle variabili α_{ij}. Anche in questo caso dunque le mappe cambio di coordinate sono infinitamente differenziabili, e $G(p,n)$ risulta essere una varietà liscia (risp. analitica) di dimensione $p(n-p)$.

2.5 Compattezza

Sappiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è uno spazio compatto, in quanto quoziente del compatto S^n tramite la relazione antipodale. Un ragionamento analogo si può sviluppare per mostrare che lo spazio proiettivo complesso è compatto.

Proposizione 2.16. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *è compatto per ogni* $n \geq 1$.

Dimostrazione. Sia l una retta in $\mathbb{C}^{n+1}$. l è individuata da un suo punto qualsiasi $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$, $l = \{\lambda(z_0, \dots, z_n) | \lambda \in \mathbb{C}\}$. Consideriamo la sfera unitaria U^n in C^{n+1},

$$U^n = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} | z_0\overline{z_0} + \dots + z_n\overline{z_n} = 1\}.$$

Per ogni retta complessa l vi sono infiniti punti di l appartenenti a U^n, per la precisione l'iniseme $l \cap U^n$ è in corrispandenza biunivoca con $U^1 \subset \mathbb{C}$.

Infatti, se $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ è un punto di modulo unitario, anche ogni punto della forma $(\cos\theta + i\sin\theta)(z_0, \dots, z_n)$ lo è. Viceversa, se $(z'_0, \dots, z'_n) \in l$ ha modulo unitario allora

$$1 = \|(z'_0, \dots, z'_n)\| = |\lambda| \cdot \|(z_0, \dots, z_n)\| = |\lambda|,$$

il che implica $\lambda = \cos\theta + i\sin\theta$. Definiamo su U^n la seguente relazione di equivalenza:

$$z_1 \sim z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \text{ tale che } z_1 = \lambda z_2.$$

Per come è stato definito abbiamo che $U^n/\!\sim \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, che risulta essere compatto in quanto quoziente del compatto $U^n \subset \mathbb{C}$. La compattezza di U^n deriva dall'essere un insieme chiuso e limitato di uno spazio euclideo. $\square$

La compattezza di $\mathbb{P}^{\binom{n}{p}-1}$ ci permetterà di concludere che la grassmanniana è una varietà compatta, dopo aver dimostrato che si tratta di un sottoinsieme chiuso dello spazio proiettivo. A tal fine torniamo a considerare $G(p,n)$ contenuta in $\mathbb{P}(\bigwedge^p V)$. Abbiamo visto che se un elemento $[\omega] \in \mathbb{P}(\bigwedge^p V)$ appartiene alla grassmanniana, allora $\omega = a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$ è totalmente decomponibile. Viceversa un p-vettore $[a_1 \wedge \cdots \wedge a_p] \in \mathbb{P}(\bigwedge^p V)$ individua univocamente un sottospazio di dimensione p in V, e risulta quindi immagine di tale sottospazio tramite la mappa di Plücker. In base alla proposizione 2.5 concludiamo perciò che $\omega \in \mathbb{P}(\bigwedge^p V)$ appartiene a $G(p,n)$ se e soltanto se la mappa

$$\begin{array}{rcl} \phi_\omega : V & \longrightarrow & \bigwedge^{p+1} V \\ v & \longmapsto & \omega \wedge v \end{array}$$

ha rango $n-p$. Chiaramente ϕ_ω è lineare. Sia $\Phi_\omega \in \mathcal{M}_{\binom{n}{p+1},n}(\mathsf{K})$ la matrice associata a tale applicazione. Il rango di ϕ_ω è allora $n-p$ se e solo se tutti i minori di ordine $n-p+1$ di tale matrice sono nulli. L'annullarsi di questi minori dà un numero finito di equazioni il cui insieme degli zeri è $G(p,n)$. Con questo abbiamo provato due cose, innanzitutto che la grassmanniana è un sottoinsieme chiuso e dunque compatto dello spazio proiettivo, in secondo luogo che $G(p,n)$ è una varietà proiettiva.

Definizione 2.17. Dicesi varietà proiettiva l'insieme dei punti di uno spazio proiettivo che annullano simultaneamente una famiglia di polinomi omogenei $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Osservazione 2.18. In base a quanto osservato in 1.6 per i prodotti tensoriali, dati due K-spazi vettoriali V, V', e un morfismo $f : V \longrightarrow V'$, si ha che f induce naturalmente un morfismo

$$f^\wedge : \bigwedge(V) \longrightarrow \bigwedge(V') : e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \longmapsto f(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge f(e_{i_p}).$$

In particolare si osserva che $f^\wedge$ è iniettiva se e soltanto se f lo è. Da ciò segue, se W è un sottospazio vettoriale di V, che l'iniezione $i : W \hookrightarrow V$ induce un monomorfismo $i^\wedge : \bigwedge(W) \hookrightarrow \bigwedge(V)$, da cui otteniamo che l'algebra esterna $\bigwedge(W)$ è (identificata con) un sottospazio di $\bigwedge(V)$.

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n su K, e W un suo sottospazio di dimensione $q \leq n$, dall'esservi una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei sottospazi di V/W di dimensione $p - q$ e l'insieme dei sottospazi di dimensione p di V, abbiamo che $G(p - q, V/W) \subset G(p, V)$. Più in generale se Z è un sottospazio di V contenente W, si ha che $G(p-q, Z/W) \subset G(p, V)$, in quanto chiaramente si ha $G(p, Z) \subset G(p, V)$, grazie all'inclusione $\bigwedge(Z) \hookrightarrow \bigwedge(V)$.

Facciamo poi osservare che risulta $G(p, n) \cong G(n - p, n)$. Abbiamo infatti che al sottospazio W, controimmagine di uno e un solo vettore totalmente decomponibile $[w] \in \bigwedge^p V$ tramite la mappa di Plücker, risulta associato il sottospazio ortogonale

$$\mathrm{Ann}(W) = \{v^* \in V^* | \langle v^*, w\rangle = 0 \text{ per ogni } w \in W\} \subset V^*,$$

di dimensione $n - p$ su K. A questo corrisponde poi un vettore totalmente decomponibile in $\bigwedge^{n-p} V^*$, spazio quest'ultimo isomorfo a $\bigwedge^{n-p} V$, avendo supposto V di dimensione finita.

2.6 Le relazioni di Plücker

Le equazioni della grassmanniana $G(p, n)$ ottenute sopra sono in una forma che è ben lungi dall'essere la più semplice possibile. Sembrerebbe infatti che, fissato p, il grado di queste equazioni cresca all'aumentare di n. Ora dimostreremo che, invece, le grassmanniane sono sempre definite da un sistema di equazioni quadratiche, dette relazioni di Plücker.

Definizione 2.19. Sia $v^* \in V^*$ un vettore fissato. Definiamo su $\bigwedge(V)$ l'operatore lineare *contrazione rispetto a* v^* come

$$i(v^*)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} v_1 \wedge \cdots \wedge \langle v^*, v_i\rangle \wedge \cdots \wedge v_p =$$

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \langle v^*, v_i\rangle v_1 \wedge \cdots \wedge \check{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p \tag{2.6}$$

Dalla formula appare chiaro il perché del nome contrazione: applicando $i(v^*)$ ad un p-vettore, otteniamo un $(p - 1)$-vettore, ossia $i(v^*)\big(\bigwedge^p V\big) \subset \bigwedge^{p-1} V$.

Proposizione 2.20. *Per ogni $u \in \bigwedge(V)$, $w^* \in \bigwedge(V^*)$, e comunque fissato $v^* \in V^*$, si ha che*

$$\langle i(v^*)u, w^* \rangle = \langle u, v^* \wedge w^* \rangle$$

Dimostrazione. Come già osservato, la linearità del prodotto scalare ci permette di limitare la dimostrazione ai vettori totalmente decomponibili. Siano dunque $u = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$, $w^* = w_1^* \wedge \cdots \wedge w_q^*$. Se $q \neq p-1$ entrambi i membri dell'equazione sono uguali a zero, dunque il caso $q = p-1$ è l'unico che rimane da verificare. Per farlo basta confrontare le formule (2.6) e (2.1):

$$\begin{aligned}
&\langle i(v^*)u, w^* \rangle = \\
&\Big\langle \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \langle v^*, u_i \rangle u_1 \wedge \cdots \wedge \check{u}_i \wedge \cdots \wedge u_p, w_1^* \wedge \cdots \wedge w_{p-1}^* \Big\rangle = \\
&\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \langle v^*, u_i \rangle \langle u_1 \wedge \cdots \wedge \check{u}_i \wedge \cdots \wedge u_p, w_1^* \wedge \cdots \wedge w_{p-1}^* \rangle = \\
&\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v^* \wedge w_1^* \wedge \cdots \wedge w_{p-1}^* \rangle = \langle u, v^* \wedge w^* \rangle
\end{aligned}$$

□

In maniera del tutto analoga si può definire, per ogni vettore $v \in V$, un operatore $i(v)$ su $\bigwedge(V^*)$. Si definisce poi la contrazione rispetto a un p-vettore $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_q^*$ come

$$i(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_q^*) = i(v_q^*) \circ \ldots \circ i(v_1^*).$$

Si dimostra che anche in questo caso, per ogni $u \in \bigwedge(V)$, $w^* \in \bigwedge(V^*)$, sussiste l'uguaglianza $\langle i(\Xi)u, w^* \rangle = \langle u, \Xi \wedge w^* \rangle$, comunque fissato $\Xi \in \bigwedge^q V^*$. Naturalmente, tale uguaglianza è non banale nel solo caso in cui u è un p-vettore e w^* è un $(p-q)$-vettore.

Sia ora $\omega \in \bigwedge^p V$ un p-vettore. Al fine di trovare delle condizioni affinché ω sia totalmente decomponibile, ci poniamo una domanda più generale, quella di determinare il minimo sottospazio $W \subset V$ tale che ω sia nell'immagine dell'applicazione $\bigwedge^p W \hookrightarrow \bigwedge^p V$. Vediamo perchè queste due cose sono legate. Se $l = \dim(W)$, allora deve essere $l \geq p$, altrimenti $\bigwedge^p W = 0$ e ω è contenuto nell'immagine nel solo caso banale. Se invece vale $l = p$, si ha che $\dim\left(\bigwedge^p W\right) = 1$, da cui segue che ω è totalmente decomponibile. Viceversa, se ω è totalmente decomponibile, $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$, basta prendere $W = \langle v_1, \ldots, v_p \rangle$, dunque l'uguaglianza $l = p$ è condizione necessaria e sufficiente alla totale decomponibilità di ω.

Sia $\omega^\perp$ il seguente spazio lineare:

$$\omega^\perp = \{v^* \in V^* | i(v^*)\omega = 0\} \subset V^*,$$

Vale il seguente risultato,

Lemma 2.21. *$W = \mathrm{Ann}(\omega^\perp)$ è il minimo sottospazio di V tale che ω è contenuto nell'immagine di $\bigwedge^p W \hookrightarrow \bigwedge^p V$.*

Dimostrazione. Sia $\{w_1, \dots, w_l\}$ una base per W, e completiamola ad una base $\{w_1, \dots, w_l, u_{l+1}, \dots, u_n\}$ di V. Sia poi $\{w_i^*, u_\alpha^*\}$ la base duale. Ponendo $U = \mathrm{Span}(u_{l+1}, \dots, u_n)$, la somma diretta $V = W \oplus U$ induce la seguente decomposizione:

$$\bigwedge^p V \cong \bigwedge^p W \oplus (\bigwedge^{p-1} W \otimes U) \oplus (\bigwedge^{p-2} W \otimes \bigwedge^2 U) \oplus \cdots .$$

Vogliamo mostrare che ω sta nel primo addendo diretto di tale decomposizione. Scriviamo il componente di ω nel secondo addendo come $\omega_1 = \sum_{\alpha=l+1}^n \omega_\alpha \otimes u_\alpha$, dove per ogni α $\omega_\alpha \in \bigwedge^{p-1} W$. Dall'essere $\langle u_\alpha^*, w_i \rangle = 0$ per ogni α e per ogni i, segue che $u_\alpha \in \mathrm{Ann}(W) = \omega^\perp$ (sappiamo infatti che, se V è di dimensione finita, il doppio ortogonale di un sottospazio $W \subset V$ coincide con W stesso). Abbiamo così ottenuto che $i(u_\alpha^*)\omega = 0$ per ogni α. In base a (2.6) si osserva poi che, per ogni $k \in \{1, \dots, p\}$,

$$i(u_\alpha^*) : \bigwedge^{p-k} W \otimes \bigwedge^k U \longrightarrow \bigwedge^{p-k} W \otimes \bigwedge^{k-1} U.$$

Infatti ogni prodotto scalare $\langle u_\alpha^*, w_i \rangle = 0$, e dunque ogni $(p-1)$-vettore $w_1 \wedge \cdots \wedge \check{w}_i \wedge \cdots \wedge w_l \wedge u_{l+1} \wedge \cdots \wedge u_n$ sparisce dall'ultimo membro della formula. Da questo fatto segue che i componenti $\omega_0, \dots, \omega_p$ di ω non possono annullarsi a vicenda, e quindi $i(u_\alpha^*)\omega = 0$ implica $i(u_\alpha^*)\omega_k = 0$ per ogni $k = 0, \dots, p$. Prendendo sempre come esempio il componente ω_1, abbiamo che $i(u_\alpha^*)\omega_1 = \omega_\alpha$, da cui segue che $\omega_\alpha = 0$ per ogni α, ossia $\omega_1 = 0$. In maniera simile si deduce che gli altri componenti $\omega_2, \dots, \omega_p$ di ω sono nulli, di conseguenza $\omega \in \bigwedge^p W$. Per dimostrare la minimalità di W supponiamo che esista $W' \subsetneq W$ tale che ω è contenuto nell'immagine $\bigwedge^p W' \hookrightarrow \bigwedge^p V$. Se così fosse esisterebbe un vettore $w \in W$ tale che $w \notin W'$. A meno di scegliere una nuova base per W possiamo supporre $w = w_1$. Avremmo allora, sempre tenendo a mente la formula (2.6), che $i(w_1^*)\omega = 0$. Ma ciò è assurdo, in quanto $w_1 \in W = \mathrm{Ann}(\omega^\perp)$ e $\langle w_1^*, w_1 \rangle = 1$. □

Consideriamo ora $\mathrm{Ker}(\phi_\omega) = \{v \in V | \omega \wedge v = 0\}$. Mostreremo ora delle altre condizioni equivalenti a richiedere che un p-vettore ω sia totalmente decomponibile. Dall'ultima proposizione otterremo le annunciate relazioni di Plücker.

Proposizione 2.22. *$\omega \in \bigwedge^p V$ è totalmente decomponibile se e solo se* $\mathrm{Ker}(\phi_\omega) = W$.

Dimostrazione. La prima implicazione è immediata, infatti se $\omega = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$, allora $W = \mathrm{Span}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \mathrm{Ker}(\phi_\omega)$. Viceversa, se ω non è totalmente decomponibile, abbiamo visto che $\dim(W) = l > p$, inoltre si osserva che il rango della mappa ϕ_ω è alpiù $n - p$, con uguaglianza, come si è mostrato, nel caso in cui ω è totalmente decomponibile. Questo implica che, se ω non è totalmente decomponibile, $\dim(\mathrm{Ker}(\phi_\omega) < p$, da cui la tesi. $\square$

Possiamo caratterizzare $W = \mathrm{Ann}(\omega^\perp)$ come l'immagine dell'applicazione

$$i(\Xi): \begin{array}{ccc} \bigwedge^{p-1} V^* & \longrightarrow & V \\ \Xi & \longmapsto & i(\Xi)\omega \end{array},$$

dove $i(\Xi)\omega$ è la forma lineare definita su V^* come $i(\Xi)\omega(v^*) = \langle \omega, v^* \wedge \Xi \rangle$. Si ha infatti che la condizione $i(v^*)\omega = 0$ che definisce $\omega^\perp$ significa che $i(v^*)\omega(\Xi) = 0$ per ogni $\Xi \in \bigwedge^{p-1} V^*$, ovvero $\langle i(v^*)\omega, \Xi \rangle = 0$. Ma

$$\langle i(v^*)\omega, \Xi \rangle = \langle \omega, v^* \wedge \Xi \rangle = i(\Xi)\omega(v^*) = \langle i(\Xi)\omega, v^* \rangle = 0,$$

da cui segue che possiamo definire $\omega^\perp$ in maniera equivalente alla definizione data come $\omega^\perp = \{v^* \in V^* | \langle i(\Xi)\omega, v^* \rangle = 0 \text{ per ogni } \Xi\}$. Per ortogonalità abbiamo allora che $\{i(\Xi)\omega\}_{\Xi \in \bigwedge^{p-1} V^*} = \mathrm{Ann}(\omega^\perp)$. La condizione $W = \mathrm{Ker}(\phi_\omega)$ diventa dunque

$$i(\Xi)\omega \wedge \omega = 0 \text{ per ogni } \Xi \in \bigwedge^{p-1} V^*. \tag{2.7}$$

A primo membro dell'equazione troviamo un $(p+1)$-vettore; essa individua perciò $\binom{n}{p+1}$ equazioni scalari, ottenute ponendo uguali a zero le componenti di tale vettore rispetto ad una base di $\bigwedge^{p+1} V$. Rimane da mostrare che si tratta effettivamente di equazioni quadratiche. ω è un generico elemento di $\bigwedge^p V$, dunque della forma

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} a_{i_1,\ldots,i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

Vediamo di esprimere il vettore $i(\Xi)\omega \in V$ rispetto alla base $\{e_i\}$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} & i(\Xi)\omega(v_1^* + \cdots + v_n^*) = \\ & \Big\langle \omega, (v_1^* + \cdots + v_n^*) \wedge \Big(\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_{p-1} \le n} \xi_{j_1,\ldots,j_{p-1}} e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_{p-1}}^* \Big) \Big\rangle = \\ & \Big\langle \omega, \sum_{\substack{1 \le j_1 < \cdots < j_{p-1} \le n \\ k \notin \{j_1,\ldots,j_{p-1}\}}} v_k^* \xi_{j_1,\ldots,j_{p-1}} e_k^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_{p-1}}^* \Big\rangle. \end{aligned}$$

In base alla formula (2.2) l'ultimo prodotto scalare è uguale a

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1,\dots,i_p}\Big(\sum_{j=1}^{p}(\pm 1)\xi_{i_1,\dots,\check{i}_j,\dots,i_p}v^*_{i_j}\Big),$$

dunque $i(\Xi)\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} a_{i_1,\dots,i_p}\big(\sum_{j=1}^{p}(\pm 1)\xi_{i_1,\dots,\check{i}_j,\dots,i_p}e_{i_j}\big)$.

Grazie a questa espressione si osserva che le componenti del prodotto esterno $i(\Xi)\omega\wedge\omega$ nella base $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{p+1}}\}$ sono forme quadratiche nelle variabili $a_{i_1,\dots,i_p}$, che per un generico punto della grassmanniana $G(p,n)$ coincidono con le coordinate plückeriane $\Delta_{i_1,\dots,i_p}$.

2.7 La grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^n$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K. I risultati seguenti riguardano quelle grassmanniane che parametrizzano le rette dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$. Per $p=2$, nelle relazioni di Plücker (2.7) abbiamo che $\omega\in\bigwedge^2 V$, mentre $\Xi := v^*\in\bigwedge^1 V^* = V^*$. In questo caso vedremo un modo equivalente a (2.7) per esprimere che un generico p-vettore ω è totalmente decomponibile, dimostreremo infatti che la nota relazione $\omega\wedge\omega=0$ che descrive la quadrica di Klein $\mathcal{Q}=\mathbb{G}(1,3)$ è valida in generale per $\mathbb{G}(1,n)$.

Proposizione 2.23. *Siano $\omega\in\bigwedge^p V$, $\tau\in\bigwedge^q V$. Comunque si fissi $v^*\in V^*$ si ha che*

$$i(v^*)\omega\wedge\tau = i(v^*)(\omega\wedge\tau) + (-1)^{pq+1}i(v^*)\tau\wedge\omega$$

Attenzione alle parentesi! Nella prima uguaglianza la contrazione $i(v^*)$ agisce su ω, e poi si considera il prodotto esterno del $(p-1)$-vettore ottenuto con τ, a secondo membro invece $i(v^*)$ agisce nel primo addendo su $\omega\wedge\tau$, nel secondo su τ. Otteniamo in questo modo un'uguaglianza tra vettori di $\bigwedge^{p+q-1}V$.

Dimostrazione. Come già sottolineato più volte, le proprietà di linearità di contrazione e prodotto esterno ci permettono di limitare la dimostrazione al caso in cui ω e τ siano vettori totalmente decomponibili. Siano dunque $\omega=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p$, $\tau=\tau_{p+1}\wedge\cdots\wedge\tau_{p+q}$ (la notazione ci sarà d'aiuto in

seguito). In base alla formula (2.6) si ha che

$$
\begin{aligned}
&i(v^*)(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \wedge (\tau_{p+1} \wedge \cdots \wedge \tau_{p+q}) = \\
&\Big(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\langle \omega_i, v^*\rangle \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \check{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_p\Big) \wedge (\tau_{p+1} \wedge \cdots \wedge \tau_{p+q}) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\langle \omega_i, v^*\rangle \cdot \omega_1 \wedge \cdots \wedge \check{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \tau_{p+1} \wedge \cdots \wedge \tau_{p+q}\Big) \\
&\pm \sum_{j=1}^{q}(-1)^{p+j+1}\langle \tau_j, v^*\rangle \cdot \omega \wedge \tau_{p+1} \wedge \cdots \wedge \check{\tau}_{p+j} \wedge \cdots \wedge \tau_{p+q} \\
&= i(v^*)(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \tau_{p+1} \wedge \cdots \wedge \tau_{p+q}) + \\
&(-1)^{p+1}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\langle \tau_j, v^*\rangle \cdot \underbrace{(-1)^{p(q-1)}}_{\text{formula 1.6}} \tau_{p+1} \wedge \cdots \check{\tau}_{p+j} \cdots \wedge \tau_{p+q} \wedge \omega \\
&= i(v^*)(\omega \wedge \tau) + (-1)^{pq+1} i(v^*)\tau \wedge \omega.
\end{aligned}
$$

□

Applicando la proposizione precedente al primo membro di (2.7) si ha

$$i(v^*)\omega \wedge \omega = i(v^*)(\omega \wedge \omega) + (-1)^5 i(v^*)\omega \wedge \omega,$$

da cui otteniamo che $i(v^*)\omega\wedge\omega = \frac{1}{2}i(v^*)(\omega\wedge\omega) = 0$. Poiché l'uguaglianza sussiste qualunque sia $v^* \in V^*$, concludiamo che deve essere

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

Trattandosi di un vettore di $\bigwedge^4 V$, abbiamo in questo caso $\binom{n}{4}$ equazioni scalari che descrivono $\mathbb{G}(1,n)$, invece delle $\binom{n}{3}$ che si ottengono da (2.7). In particolare nel caso $n = 4$ abbiamo che ω è della forma

$$\omega_{12}e_1 \wedge e_2 + \omega_{13}e_1 \wedge e_3 + \omega_{14}e_1 \wedge e_4 + \omega_{23}e_2 \wedge e_3 + \omega_{24}e_2 \wedge e_4 + \omega_{34}e_3 \wedge e_4.$$

Svolgendo i calcoli otteniamo

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \omega = (\omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0,
\end{aligned}
$$

equazione che descrive $\mathcal{Q}$ come una ipersuperficie quadrica liscia di $\mathbb{P}^5$.

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1969).

[2] W. H. Greub, *Multilinear algebra*, Springer-Verlag (1967).

[3] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons (1978).

[4] A. Logar, *Note su algebra esterna e varietà grassmanniane*, `http://www.dmi.units.it/~mezzette/IGS_grassmann.pdf`.

[5] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri (1994).

[6] K. E. Smith et al., *An invitation to algebraic geometry*, Springer-Verlag (2000).